

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE ECONOMIA  
MBA EM FINANÇAS E GESTÃO DE RISCO  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**ANÁLISE QUANTITATIVA DE DESEMPENHO DOS  
ÍNDICES DOW JONES E NASDAQ NOS PERÍODOS  
PRÉ E PÓS-CRISE FINANCEIRA DE 2008**

ANDERSON CASTELO BRANCO REZENDE

ORIENTADOR: Prof. Manuel Alcino Ribeiro da Fonseca

RIO DE JANEIRO  
AGOSTO DE 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE ECONOMIA  
MBA EM FINANÇAS E GESTÃO DE RISCO  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**ANÁLISE QUANTITATIVA DE DESEMPENHO DOS  
ÍNDICES DOW JONES E NASDAQ NOS PERÍODOS  
PRÉ E PÓS-CRISE FINANCEIRA DE 2008**

ANDERSON CASTELO BRANCO REZENDE

ORIENTADOR: Prof. Manuel Alcino Ribeiro da Fonseca

RIO DE JANEIRO  
AGOSTO DE 2013

*As opiniões expressas neste trabalho são de exclusiva responsabilidade do autor.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao corpo docente do MBA em Finanças e Gestão de Risco, pelo ensino de qualidade e conhecimentos que me foram transmitidos dentro e fora de sala de aula.

Ao Professor Manuel Alcino Ribeiro da Fonseca, pela disponibilidade na orientação e valiosas sugestões fornecidas durante a execução deste trabalho.

Aos meus colegas de classe, por todo o companheirismo demonstrado no decorrer do curso.

## RESUMO

O sistema financeiro dos Estados Unidos é alvo constante da atenção do setor externo, uma vez que o mesmo se configura numa espécie de locomotiva dos negócios a nível mundial, embora nos últimos anos tenhamos observado o surgimento de novos mercados consumidores em potencial (China e Índia, por exemplo). Analisar e compreender as razões pelas quais os principais índices do mercado de ações dos Estados Unidos oscilam, e seus respectivos impactos no mundo dos negócios, é um trunfo nas mãos daqueles que desejam investir no mercado financeiro, uma vez que esses indicadores se configuram como balizadores dos rumos da economia mundial, sendo, portanto, um referencial para aqueles que se defrontam com um problema de tomada de decisão (do ponto de vista de investimentos). O objetivo deste estudo é avaliar se ocorreram mudanças estruturais significativas no mercado de ações norte-americano nos anos que antecederam a crise financeira do triênio 2007 – 2009, comparativamente ao período posterior. Foram analisadas as performances de dois dos principais Índices do referido mercado, quais sejam, o Índice Nasdaq Composite, e o Índice Dow Jones Industrial Average. Utilizou-se como ferramentas de análise o Índice de Sharpe, amplamente aplicado em Finanças, que tem sua base fundamentada na Teoria de Carteiras, e o conceito de Testes de Hipóteses, no qual optou-se pela aplicação do Teste-t para Diferença de Duas Médias, a fim de verificar se as rentabilidades das séries dos Índices Nasdaq e Dow Jones apresentam diferenças significativas no período anterior e no período que sucedeu a crise.

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	8
1. A DIFERENÇA ENTRE OS ÍNDICES NASDAQ E DOW JONES .....	10
2. TEORIA DE CARTEIRAS.....	11
2.1 Breve histórico da Teoria do Portfólio .....	11
2.2 O Modelo de Precificação de Ativos (CAPM).....	12
2.3 O Modelo Média-Variância de Markowitz .....	14
2.4 O Índice de Sharpe .....	15
3. ANÁLISE ESTATÍSTICA E TESTES DE HIPÓTESES .....	17
3.1 Análise Estatística dos Dados .....	17
3.2 Fundamentos de Testes de Hipóteses.....	21
3.3 Elementos de um Teste de Hipóteses .....	22
3.4 Erros Estatísticos .....	23
3.5 Região Crítica: Testes Unilaterais x Testes Bilaterais .....	24
3.6 Procedimentos para a realização de um Teste de Hipóteses .....	26
3.7 A Escolha do Teste Adequado .....	26
3.8 O Teste T Para Diferença de Duas Médias sob a Hipótese de Variâncias Iguais e Desconhecidas .....	26
4. RESULTADOS E COMENTÁRIOS.....	28
4.1 Aplicação do Índice de Sharpe.....	28
4.2 Aplicação do Teste-t para Diferença de Duas Médias .....	29
CONCLUSÃO .....	31

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fronteira Eficiente com Concessão e Tomada de Empréstimo .....	14
Figura 2 - Evolução Histórica dos Índices Dow Jones e Nasdaq entre Janeiro de 2004 e Dezembro de 2012 .....	17
Figura 3 - Evolução Histórica das Rentabilidades dos Índices Dow Jones e Nasdaq no período Fev 2004 a Dez 2012.....	19
Figura 4 - Gráfico de Dispersão entre as Rentabilidades dos Índices Dow Jones e Nasdaq ...	21
Figura 5 - Regiões de rejeição para testes unilaterais e bilaterais .....	25

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tipos de Erros em Testes de Hipóteses .....	24
Tabela 2 - Cálculo do Índice de Sharpe para os Índices Dow Jones e Nasdaq em períodos distintos relacionados à Crise Financeira de 2008 .....	28
Tabela 3 – Teste-t para duas amostras presumindo variâncias equivalentes .....	30

## INTRODUÇÃO

A crise financeira de 2008 tem sua origem na maior economia do mundo, os Estados Unidos da América. Após os ataques terroristas de 11 de Setembro de 2001, o Governo americano, na figura do então Presidente George W. Bush, declarou a “Guerra ao Terror”, como parte de uma estratégia global de combate ao terrorismo, vindo a ocupar países como o Afeganistão e o Iraque. Diante desse cenário, o Governo iniciou um processo de gastos desenfreado para sustentar a guerra.

Ao invés de conter os gastos, os Estados Unidos receberam investimentos diretos de países como Inglaterra e China. Com o dinheiro injetado do exterior, os bancos passaram a oferecer mais crédito. Clientes até então considerados de alto risco também foram beneficiados por essa expansão do crédito no país. Dessa forma, o consumo aumentou significativamente, “empurrado” por um cenário de grande oferta de crédito e baixas taxas de juros. O aumento do consumo das famílias, em muitos casos, não era acompanhado por crescimento na compatível com o nível de renda dessas famílias. Assim, para conseguir elevar o seu padrão de vida, boa parte dessas famílias tomava empréstimos oferecendo suas casas como garantia, ou refinanciando suas hipotecas. O mercado imobiliário ficara, então, aquecido. Muitas pessoas investiam em construção e aquisição de imóveis. Os preços se elevaram de forma significativa. Então aconteceu que quando se pegava empréstimos dando como garantia sua própria casa, essas pessoas recebiam uma grande diferença, ou simplesmente, se não pagassem as parcelas e fossem obrigadas a leiloar ou vender a casa para honrar a dívida, ganhariam uma diferença entre o valor do empréstimo e o preço de venda.

Após esse boom imobiliário, as taxas de juros subiram, diminuindo o número de empréstimos e a procura por imóveis, fazendo com que os preços caíssem vertiginosamente. A essa altura, as famílias já haviam se endividado em excesso. Quando os lucros das empresas começaram a cair, houve milhares de demissões, aumentando o desemprego e contribuindo para uma onda de inadimplência. Com isso, começou a faltar dinheiro aos bancos, ajudados em um primeiro momento pelo Governo americano. Com uma série de críticas a essa política de socorro aos banqueiros, a Casa Branca resolveu não mais interferir, fato que levou à quebra um dos maiores bancos de crédito do país, o Lehman Brothers, desencadeando, a partir daí, uma crise financeira sem precedentes.



Este trabalho está dividido em 4 capítulos. O primeiro capítulo aborda brevemente as principais diferenças entre os Índices Nasdaq e Dow Jones, do ponto de vista da composição de cada um. O capítulo 2 apresenta os fundamentos da Teoria de Carteiras de Markowitz, no qual também será abordada a Teoria do Modelo de Precificação de Ativos (CAPM, na sigla em inglês), bem como o conceito do Índice de Sharpe, uma das ferramentas que serão utilizadas na análise de performance dos dados da amostra. Na parte 3, analisa-se graficamente o comportamento das séries do Nasdaq e do Dow Jones e descreve-se as bases da construção de um teste de hipóteses. Por fim, no capítulo 4 são apresentados os resultados e comentários do Índice de Sharpe e do Teste-t para Diferença de Duas Médias aplicados aos dados coletados.

## 1. A DIFERENÇA ENTRE OS ÍNDICES NASDAQ E DOW JONES

O índice Dow Jones foi introduzido em 1884 por Charles Henry Dow, precursor da análise de ações, e seu sócio Eduard Jones – primeiros editores do *The Wall Street Journal*. A idéia era formar uma empresa que divulgasse cotações de ações e notícias econômicas do mercado de Nova York. Dessa forma, criaram a *Dow Jones & Company*.

De início, onze companhias faziam parte da estrutura do índice, sendo nove delas construtoras de estradas de ferro. Hoje, o Dow Jones, divulgado diariamente, acompanha a variação média dos papéis das 30 maiores e mais tradicionais empresas dos EUA, sendo, por isso, uma referência no mercado de ações, devido à tradição e solidez das empresas que o compõem.

A bolsa Nasdaq, por sua vez, iniciou suas atividades em 1971, e surgiu da necessidade, dez anos antes, do Congresso dos EUA em encontrar uma alternativa de crescimento para o mercado de capitais norte-americano. Era necessário um sistema de compra e venda de baixo custo e que proporcionasse agilidade nas transações. De início, os interessados em comprar e vender nesse novo sistema se cadastravam para ter o direito de realizar transações, que eram executadas por telefone e telégrafo. Hoje, a Nasdaq utiliza tecnologia de ponta na organização de suas operações.

Conhecida na imprensa como bolsa eletrônica, a Nasdaq é diferente da Bolsa de Nova York (NYSE), ou de qualquer outra bolsa tradicional, uma vez que se trata de um sistema de negociações e não há um espaço físico para a atuação dos corretores. O número de empresas que negociam diariamente na bolsa eletrônica é de aproximadamente 4.100. Para se saber as variações desse mercado, há o índice Nasdaq-100, composto pelas 100 empresas que operam maior volume de negócios<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> As empresas que compõem o Índice Nasdaq não são necessariamente as mais lucrativas. O critério para se estar no ranking do índice é o volume de negócios.

## 2. TEORIA DE CARTEIRAS

### 2.1 Breve histórico da Teoria do Portfólio

A Teoria Moderna do Portfólio (ou Teoria de Carteiras) foi desenvolvida, de forma pioneira, por MARKOWITZ (1952), e explica como investidores racionais utilizam a diversificação de ativos para obter o maior retorno possível em suas respectivas carteiras de investimentos, durante um período único, através da relação risco-retorno (Modelo de Média-Variância<sup>2</sup>), sendo o retorno medido pela média aritmética das rentabilidades, e o risco sendo medido pela variância dessas rentabilidades – ou, mais especificamente, pelo desvio-padrão –, o que permite mensurar a volatilidade da série. Dessa forma, essas seriam as únicas duas variáveis que interessariam ao investidor diante da escolha de ativos para a composição de sua carteira de investimentos. (ELTON et al, 2012).

O objetivo do modelo é, portanto, determinar como selecionar uma carteira que proporcione ao investidor o maior retorno possível, dado um determinado nível de risco, ou, ao contrário, como obter uma carteira com o menor nível de risco, considerando um determinado nível de retorno. Assim, segundo Markowitz, existe um conjunto que reúne todas as carteiras às quais atendem as melhores condições de risco e retorno estipuladas pelo investidor, denominado fronteira eficiente (cujo conceito veremos mais adiante). Isso significa que os investidores se concentrariam nas carteiras que estivessem sobre a linha de fronteira, ignorando as demais, consideradas inferiores. (ELTON et al, 2012).

Outra característica do modelo proposto por Markowitz é a de que os ativos de um portfólio não devem ser selecionados individualmente, ou seja, o investidor deve sempre levar em consideração como cada ativo se comporta em relação aos outros, isto é, como uma mudança no preço de um ativo afeta o desempenho dos demais.

---

<sup>2</sup> O Modelo de Média-Variância tem como objetivo escolher, de forma ótima, os fatores de ponderação dos ativos que farão parte do portfólio do investidor. No contexto da Teoria de Markowitz, o conjunto ótimo de pesos desses ativos é aquele que apresenta a maior rentabilidade possível, e com o menor nível possível de volatilidade, que aqui é representada pela variância da taxa de retorno.

Uma ferramenta bastante utilizada para se obter uma carteira adequada às condições de retorno e risco de um determinado investimento é o Índice de Sharpe, desenvolvido por SHARPE (1966). Esse índice expressa a relação entre o retorno e o risco de um ativo, mostrando se o ativo em questão oferece uma rentabilidade compatível com o risco a que expõe o investidor. Apesar de sua importância prática, a sua utilidade depende da correta estimação dos parâmetros a serem utilizados, como por exemplo, o retorno esperado do mercado e o retorno esperado do ativo livre de risco. Além desses indicadores, os parâmetros do modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), como o  $\beta$ , que consiste em uma medida do nível de risco sistemático ou risco não-diversificável<sup>3</sup>, podem ser usados para complementar a análise baseada no Índice de Sharpe. A seguir, apresentamos os fundamentos básicos do modelo CAPM e do Índice de Sharpe, que será utilizado adiante para fins deste estudo. (ASSAF NETO, 2008)

## 2.2 O Modelo de Precificação de Ativos (CAPM)

O Modelo de Precificação de Ativos, ou Modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) foi desenvolvido no começo da década de 1960, por Sharpe, Lintner e Mossin. A idéia é de que existe uma relação linear entre a rentabilidade esperada de um ativo qualquer, num mercado em equilíbrio, com o risco não-diversificável (risco sistêmico ou risco de mercado), representado por um coeficiente beta (ASSAF NETO, 2008), cuja fórmula pode ser visualizada a seguir:

$$\beta_i = \frac{R_i - R_f}{R_m - R_f} \quad (1)$$

Onde:  $R_i$  → taxa de retorno esperado do ativo

$R_m$  → taxa média de retorno do mercado

$R_f$  → taxa de retorno do ativo livre de risco

---

<sup>3</sup> O risco não-diversificável ou sistêmico (ou ainda, risco de mercado), é a parcela de risco de um investimento que afeta todas as empresas, não sendo específico de uma Companhia. Fatores como guerras, inflação e incidentes internacionais compõem o risco não-diversificável, que não pode ser reduzido ou eliminado por meio da diversificação.

Ao resolvermos a equação (1) em função de  $R_i$ , temos:

$$R_i = R_f + \beta (R_m - R_f) \quad (2)$$

Outra forma de mensurar o coeficiente beta é pensá-lo como sendo a razão entre a covariância entre os retornos do ativo  $i$  e as taxas de retorno do mercado e a variância das taxas de retorno do mercado, como vemos a seguir:

$$\beta_i = \frac{COV(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)}$$

Se  $\beta < 1$ , o ativo pode ser considerado defensivo, ou seja, caso o mercado venha a sofrer uma alta ou uma baixa, o preço do ativo também sofre alta ou baixa, porém, menos que proporcional aos números do mercado.

Se  $\beta = 1$ , o ativo é neutro, evidenciando uma correlação perfeita entre as taxas de retorno do ativo individual e as taxas de retorno do mercado.

Se  $\beta > 1$ , o ativo pode ser considerado agressivo, ou seja, caso o mercado venha a sofrer uma alta ou uma baixa, o preço do ativo também sofre alta ou baixa, porém, mais que proporcional aos números do mercado.

Dada a complexidade do mercado, a implementação de modelos simples que buscam explicá-lo requer a adoção de alguns pressupostos. Dessa forma, o modelo CAPM é válido se levamos em conta as seguintes condições:

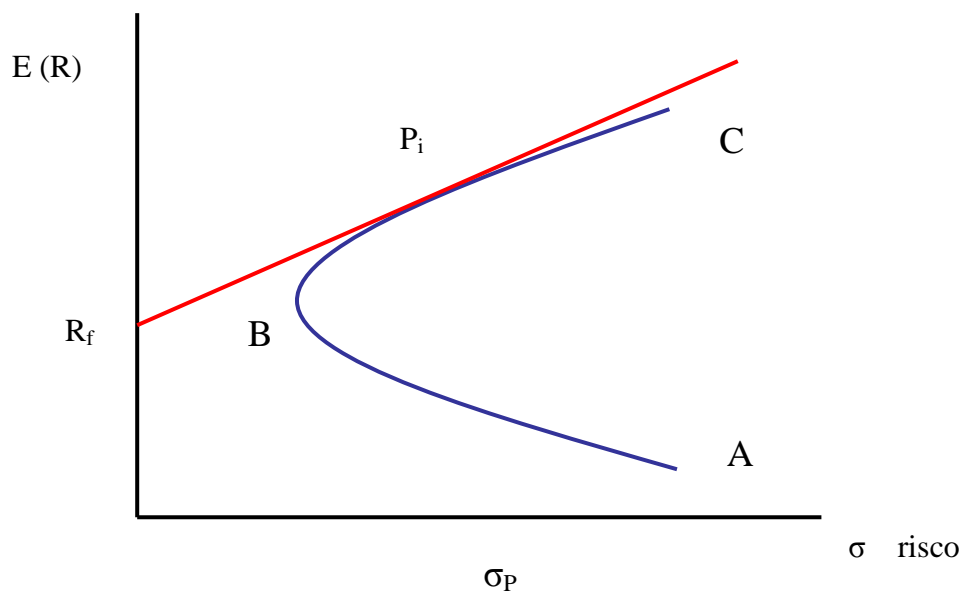
- Os investidores são tomadores de preços e possuem expectativas homogêneas;
- O modelo considera apenas um período;
- Existência de um ativo livre de risco;
- Não há cobrança de impostos ou custos de transação;

- São permitidas vendas a descoberto <sup>4</sup> ilimitadas;
- Concessão e tomada de empréstimos ilimitadas à taxa de juros sem risco.

### 2.3 O Modelo Média-Variância de Markowitz

A equação (2) é conhecida como Linha de Mercado de Títulos (LMT), e pode ser usada para analisar ativos individuais – independentes das carteiras em que são incluídos. Um resultado equivalente, válido para carteiras de ativos, é obtido do modelo desenvolvido por Markowitz. Esse resultado, conhecido como Linha do Mercado de Capitais (LMC) é representado através do segmento de reta que une a carteira de mercado, representada por “ $P_i$ ” na figura 1, ao ponto  $R_f$ , que representa a rentabilidade do ativo livre de risco. (ELTON et al, 2012).

Figura 1 – Fronteira Eficiente com Concessão e Tomada de Empréstimo



Fonte: ELTON et al, 2012

<sup>4</sup> Venda a descoberto (em inglês, *short selling*) é uma prática financeira que consiste na venda de um ativo financeiro que não se possui, esperando que seu preço caia, para então comprá-lo de volta e lucrar na transação com a diferença.

A figura 1 ilustra o cenário com a existência de concessão e tomada de empréstimo. Nesse sentido, a carteira de ativos que qualquer investidor manteria pode ser identificada sem que conheçamos suas preferências quanto ao risco, já que a carteira escolhida se situará sobre a linha de mercado de capitais. O investidor satisfaz suas preferências ao escolher o ponto no gráfico onde a LMC tangencia a fronteira eficiente (ponto  $P_i$ ). BC representa a fronteira eficiente, enquanto ABC representa o conjunto das carteiras de variância mínima<sup>5</sup>. De uma forma geral, a fronteira eficiente será diferente para cada investidor, em razão das diferenças de expectativas. (ELTON et al, 2012).

## 2.4 O Índice de Sharpe

Um dos maiores desafios de um investidor no mercado financeiro é obter o maior retorno que ele puder em sua carteira de investimentos, com o menor risco possível. Num cenário hipotético, imagine que estamos diante de duas opções de investimento: o investimento A, que promete um retorno de 15% sobre o seu capital, e o investimento B, que promete um retorno de 25%. Parece óbvio que a escolha do investidor seria o investimento B. No entanto, se adicionarmos a informação de que o investimento A é praticamente livre de risco (ou possui um risco irrisório), e que o investimento B possui uma alta probabilidade de fazer com que o investidor perca todo o seu capital (e supondo um investidor avesso ao risco), a escolha seria outra.

Amplamente utilizado em finanças, o Índice de Sharpe (IS), proposto por Sharpe (1966), é uma ferramenta que permite ao investidor saber até que ponto ele está sendo bem remunerado pelo risco que está correndo, já que, na prática, dificilmente conseguimos um investimento que seja ao mesmo tempo livre de risco e altamente rentável.

O IS se encaixa na teoria de seleção de carteiras, mais especificamente no modelo Média-Variância, apontando as carteiras ótimas na Linha de Mercado de Capitais (LMC),

---

<sup>5</sup> A carteira de variância mínima é aquela que se situa no ponto mais à esquerda da fronteira eficiente. Esse é o ponto que possui o menor risco, se comparado com as demais combinações possíveis de carteiras, mas não necessariamente representará o ponto de maior retorno. (ELTON et al, 2012)

definida na seção anterior. Nesse sentido, o IS seria a inclinação da LMC (ELTON et al, 2012), definido por:

$$IS = \frac{E(R_A) - E(R_f)}{\sigma_A}$$

onde:  $E(R_A)$  → retorno esperado do ativo

$E(R_f)$  → retorno esperado do ativo livre de risco

$\sigma_A$  → desvio-padrão (volatilidade) do ativo

Normalmente, a utilização do Índice de Sharpe se faz pertinente quando queremos comparar o resultado de um determinado ativo com um *benchmark*, termo que, em finanças, representa algum índice ou preço de referência para a medição da performance média de um mercado de um determinado ativo. Ex: o IBOVESPA é o *benchmark* mais utilizado para fundos de ações, enquanto que o CDI é um *benchmark* para o mercado de renda fixa.



### 3. ANÁLISE ESTATÍSTICA E TESTES DE HIPÓTESES

#### 3.1 Análise Estatística dos Dados

A figura 2 retrata a evolução das médias mensais de pontos dos Índices Dow Jones e Nasdaq entre Janeiro de 2004 e Dezembro de 2012. Ainda que não possamos comparar uma série com a outra – dadas as características descritas no capítulo 1 –, percebe-se que as variáveis mencionadas caminham na mesma direção durante o período analisado, embora seja nítido que o Índice Dow Jones apresenta uma maior volatilidade ao longo do tempo, tendo atingido o seu pico em outubro de 2007, com 13.930 pontos, e sua maior baixa verificada em fevereiro de 2009, bem no ápice da crise financeira, com 7.063 pontos.

Figura 2 - Evolução Histórica dos Índices Dow Jones e Nasdaq entre Janeiro de 2004 e Dezembro de 2012



Fonte: Elaboração própria a partir dos dados de Banco Central do Brasil – Sistema Gerenciador de Séries Temporais

As séries acima representadas possuem ainda uma outra característica, que é a chamada *não-estacionariedade*. Uma série temporal é dita não-estacionária quando não conserva suas propriedades estatísticas (média e variância, por exemplo) com o passar do tempo, não apresentando, portando, um equilíbrio estável<sup>6</sup>.

Na prática, é interessante que possamos trabalhar com séries estacionárias. Um dos artifícios mais utilizados no campo de Finanças para conseguir tal resultado é considerar as diferenças logarítmicas entre o valor de uma determinada ação no período  $t$  e no período  $t - 1$ . Supondo um ativo que possua, no período  $t$ , um preço  $P_t$  e proporcione um ganho  $D_t$ , sua rentabilidade ( $r_t$ ) será representada pela equação abaixo:

$$r_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Desmembrando os termos:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} + \frac{D_t}{P_{t-1}}$$

Para efeito de simplificação, supomos  $D_t = 0$ :

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \Rightarrow \frac{P_t}{P_{t-1}} = 1 + r_t \Rightarrow \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(1 + r_t)$$

De acordo com a Expansão de Taylor<sup>7</sup>, para um  $r_t$  pequeno,  $\ln(1 + r_t)$  é aproximadamente igual a  $r_t$ . Assim, a equação se reduz a:

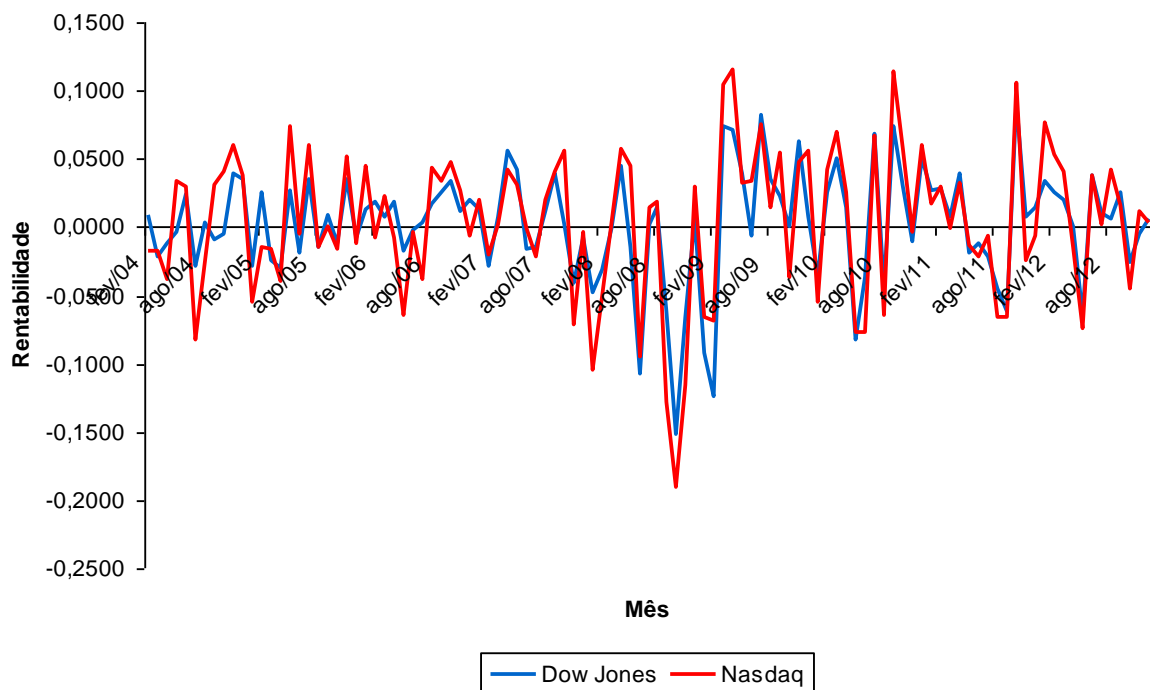
<sup>6</sup> Para mais detalhes, ver: MORETTIN & TOLÓI (2006), cap.1, pg. 4.

<sup>7</sup> Para mais detalhes, ver FLEMMING & GONÇALVES (1992), cap. 6, pgs. 317 – 327.

$$\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = r_t \quad \text{ou} \quad \ln P_t - \ln P_{t-1} = r_t$$

Após aplicar a fórmula acima aos dados da amostra, obtivemos o gráfico representado na figura 3. Nota-se que, ao considerarmos as diferenças logarítmicas entre os retornos mensais de cada índice, as séries correspondentes a cada um deles, ainda que apresentem uma certa volatilidade, parecem flutuar em torno de uma mesma média ao longo do tempo, caracterizando, portanto, uma série estacionária.

**Figura 3 - Evolução Histórica das Rentabilidades dos Índices Dow Jones e Nasdaq no período Fev 2004 a Dez 2012**



Fonte: Elaboração própria a partir dos dados de Banco Central do Brasil – Sistema Gerenciador de Séries Temporais.

Seguindo a análise da figura 3, é possível observar, com maior nitidez, que as séries apresentam um comportamento semelhante, seja em momentos de alta ou durante períodos recessivos, evidenciando uma correlação positiva entre as mesmas, com o Índice Nasdaq revelando uma volatilidade ligeiramente maior que o Índice Dow Jones.

Outra forma de comprovar a correlação entre os dados é através da construção do gráfico de dispersão, o qual nos permite verificar se existe uma tendência de comportamento entre dois grupos de observações. Isso está representado na figura ?, na qual consideramos as rentabilidades das séries, tal qual fizemos para o gráfico anterior. Aqui, fica evidente a existência de uma correlação positiva entre o Nasdaq e o Dow Jones no período de janeiro de 2004 a dezembro de 2012, representada pela linha em verde no gráfico.

O indicador  $R^2$  representa o chamado *Coefficiente de Determinação*, que, sucintamente, é uma medida de ajustamento de um modelo estatístico linear generalizado, como a Regressão linear, em relação aos valores observados, variando entre 0 e 1, e indica o quanto o modelo consegue explicar os valores observados<sup>8</sup>. Quanto maior o  $R^2$ , mais o modelo se ajusta à amostra.

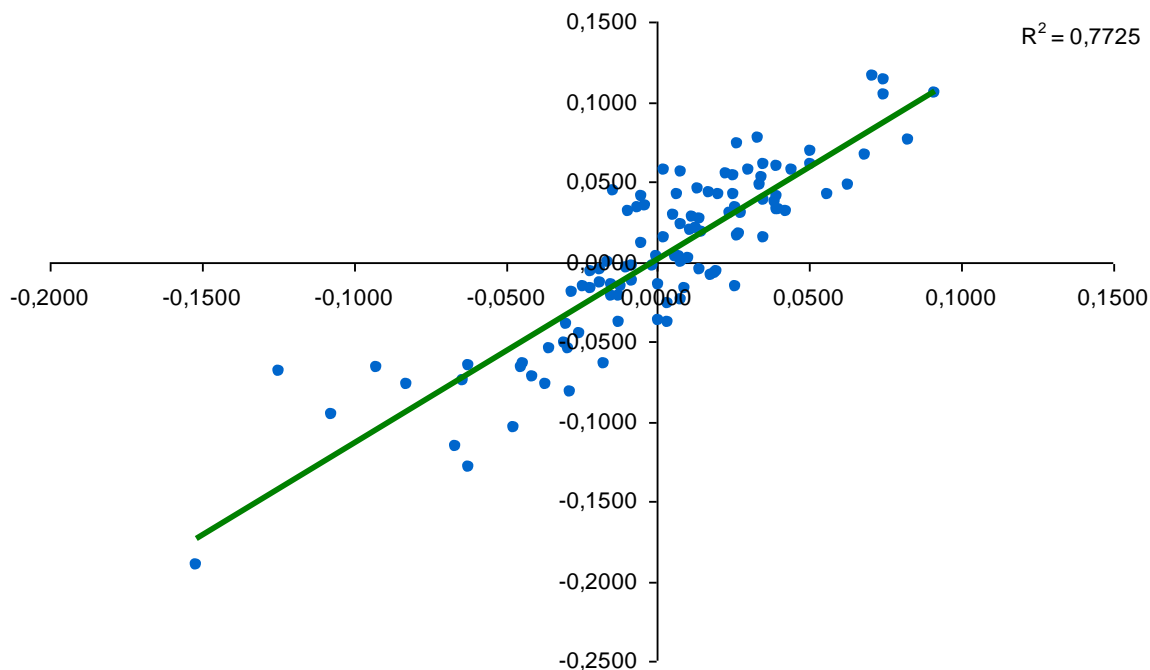
A partir do  $R^2$ , é possível conhecermos um outro indicador importante, chamado *Coefficiente de Correlação de Pearson*, que mede o grau de correlação entre duas variáveis em escala métrica. Este indicador, por sua vez, varia entre -1 e +1, no qual, conforme nos aproximamos de cada extremo, temos uma forte correlação (positiva ou negativa) entre os grupos observados, e quanto mais próximo de 0, fica caracterizada a ausência de correlação entre as variáveis. O Coeficiente de Correlação de Pearson é determinado calculando-se o quadrado do Coeficiente de Determinação, o que, no nosso caso, resulta em 0,60, confirmando a correlação positiva entre as séries em questão<sup>9</sup>.

---

<sup>8</sup> Para mais detalhes, ver GUJARATI (2000), pg. 64

<sup>9</sup> Outra maneira de se obter o Coeficiente de Correlação de Pearson é calcular a razão entre a covariância entre as duas variáveis estudadas e o produto dos seus respectivos desvios-padrão. Para mais detalhes, ver BUSSAB & MORETTIN (2012), pg. 83

**Figura 4 - Gráfico de Dispersão entre as Rentabilidades dos Índices Dow Jones e Nasdaq**



Fonte: Elaboração própria a partir dos dados de Banco Central do Brasil – Sistema Gerenciador de Séries Temporais.

### **3.2 Fundamentos de Testes de Hipóteses**

O principal objetivo ao se realizar uma análise estatística dos dados, é verificar, de acordo com limites pré-estabelecidos, se os resultados obtidos têm significância estatística. Quando formulamos uma hipótese acerca de uma determinada característica de uma população, a amostra dela retirada pode:

- Pertencer à população de origem (portanto as diferenças observadas são decorrentes de flutuações normais);
- Não pertencer à população (neste caso, as diferenças observadas representam um efeito real, não podendo ser atribuídas ao acaso).

No primeiro caso, dizemos que as diferenças encontradas entre os valores observados e os valores populacionais *não são estatisticamente significativos*. Já no segundo caso, *são estatisticamente significativos*.

É importante ressaltar que utilizamos essas expressões tendo em vista sempre níveis de significância pré-estabelecidos. Abordaremos o conceito de nível de significância mais adiante.

### 3.3 Elementos de um Teste de Hipóteses

Para se testar uma hipótese, faz-se necessário, antes de tudo, estabelecer uma *hipótese nula*, uma *hipótese alternativa* e o *nível de significância*.

Hipótese Nula: denominamos hipótese nula à hipótese tida como verdadeira até que provas estatísticas indiquem o contrário. Comumente designada por  $H_0$ , a hipótese nula pode ser uma afirmação quanto a um parâmetro que é propriedade da população (média, variância, desvio-padrão, etc.).

Hipótese Alternativa: a hipótese alternativa, como o próprio nome sugere, deve ser uma afirmação complementar à hipótese nula, e é usualmente denotada por  $H_1$ . Sendo ambas antagônicas, a aceitação de uma hipótese acarreta na rejeição da outra e vice-versa, por exemplo, suponha que desejamos comparar os valores obtidos para a variável altura entre indivíduos de amostras<sup>10</sup> de duas cidades, A e B.

As hipóteses nula e alternativa poderiam ser:

- $H_0$ : A média das alturas da cidade A é igual à da cidade B.
- $H_1$ : A média das alturas da cidade A é diferente da média das alturas da cidade B.

---

<sup>10</sup> Como não é possível observar todos os elementos de uma população, o teste é baseado na observação de uma amostra aleatória dela retirada.

Nível de Significância: além de definirmos a hipótese nula a ser utilizada, devemos, ainda, estabelecer o nível de significância que iremos adotar. O nível de significância (ou risco  $\alpha$ ) representa o risco que se corre de rejeitar uma hipótese verdadeira ou aceitar uma hipótese falsa. Segundo CASTRO (2003), o nível de significância “*é o critério para decidir se a diferença entre a informação amostral e o valor estabelecido na hipótese nula é significativamente grande a ponto de se rejeitar  $H_0$* ”. Por exemplo, se adotamos um nível de significância de 5%, estamos estabelecendo uma probabilidade de 0,05 de rejeitar a hipótese nula, sendo a mesma verdadeira.

Estatística Teste: é uma estatística calculada a partir da amostra e que é usada para tomar a decisão sobre rejeitar ou não a hipótese nula. Este parâmetro é geralmente representado pela letra T.

Valores Críticos: O(s) valor(es) extremo(s) da estatística teste, ou seja, o(s) valor(es) que, se for(em) excedido(s), acarreta(m) em evidências ínfimas para suportar a hipótese nula, levando-nos a aceitar a hipótese alternativa. O(s) valor(es) crítico(s) depende(m) diretamente do nível de significância estabelecido.

### 3.4 Erros Estatísticos

Geralmente, realizamos o teste de hipóteses para tentar refutar a hipótese nula ( $H_0$ ), no entanto, por erros amostrais, pode-se incorrer em erros de tomada de decisão, quais sejam:

- **Erro Tipo I ( $\alpha$ )**: rejeita-se  $H_0$ , quando  $H_0$  é verdadeira.
- **Erro Tipo II ( $\beta$ )**: aceita-se  $H_0$ , quando  $H_0$  é falsa.

**Tabela 1 – Tipos de Erros em Testes de Hipóteses**

	Hipótese nula é verdadeira	Hipótese nula é falsa
Aceita-se a Hipótese nula	Aceita-se corretamente	<b>Erro Tipo II</b>
Rejeita-se a Hipótese nula	<b>Erro Tipo I</b>	Rejeita-se corretamente

Fonte: CASTRO (2003)

### 3.5 Região Crítica: Testes Unilaterais x Testes Bilaterais

Suponha que tenhamos uma hipótese nula ( $H_0$ ) e uma hipótese alternativa ( $H_1$ ). Consideramos então a distribuição dada e realizamos um teste para determinar se a hipótese nula deve ou não ser rejeitada em favor da hipótese alternativa considerada.

A região crítica (ou região de rejeição) é o conjunto de valores da estatística teste que nos levam a rejeitar a hipótese nula.

Há dois tipos de testes que podem ser realizados. Um teste unilateral busca identificar um aumento ou uma diminuição no parâmetro analisado, enquanto um teste bilateral busca alguma mudança nesse parâmetro (podendo ser qualquer mudança, independente de ser um aumento ou uma diminuição). Nos testes unilaterais, a hipótese alternativa apenas contempla possibilidades à direita *ou* à esquerda da hipótese nula. Nos testes bilaterais, a hipótese alternativa contempla possibilidades à direita *e* à esquerda da hipótese nula.

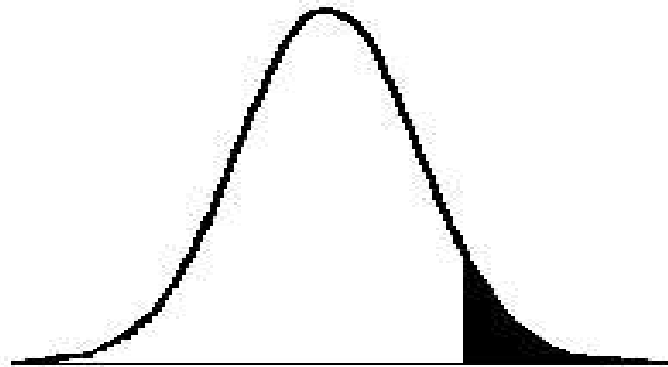
Um exemplo utilizando um teste unilateral: o valor crítico de  $t$ , com 12 graus de liberdade e utilizando um nível de significância de 0,05 é igual a 2,18. Isso significa que, uma vez calculado o valor da estatística teste, comparamos este com o valor crítico determinado. Sendo o primeiro maior que o último, rejeitamos a hipótese nula.

Raciocínio semelhante se aplica aos casos bilaterais. A diferença é que estaremos trabalhando agora com dois valores críticos. Sendo o valor da estatística teste maior que o valor crítico de sinal positivo *ou* menor que o valor crítico de sinal negativo, rejeitamos  $H_0$ .

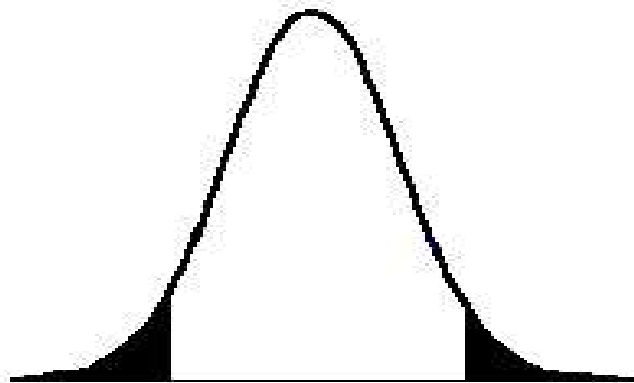


Caso contrário, não há evidências estatísticas suficientes para que rejeitemos  $H_0$ , ao nível de significância pré-estabelecido.

**Figura 5 - Regiões de rejeição para testes unilaterais e bilaterais**



Área sombreada: região de rejeição unilateral para  $\alpha = 0,05$



Área sombreada: região de rejeição bilateral para  $\alpha = 0,05$

Podemos realizar o teste adotando qualquer nível de significância (geralmente usa-se um  $\alpha=0,05$ , ou  $\alpha=0,01$ ). Como destacamos acima, se realizamos o teste ao nível de significância de 0,05, estamos assumindo um risco de 5% de rejeitarmos erradamente a hipótese nula, ou seja, um risco de 5% de cometermos um erro do tipo I.

### **3.6 Procedimentos para a realização de um Teste de Hipóteses**

1. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa apropriadas.
2. Especificar o nível de significância ( $\alpha$ ) para o teste.
3. Selecionar a estatística teste que será utilizada.
4. Usar o nível de significância para estabelecer uma regra de decisão que levará à rejeição ou não da hipótese nula ( $H_0$ ).
5. Calcular o valor da estatística teste.
6. Comparar o valor da estatística teste com o(s) valor(es) crítico(s) especificado(s) na regra de decisão para determinar se  $H_0$  deve ser rejeitada ou não.
7. Concluir, baseado na decisão tomada.

### **3.7 A Escolha do Teste Adequado**

Optamos por utilizar neste estudo o Teste T para Diferença de Duas Médias. Estamos supondo duas amostras independentes para cada índice do mercado de ações norte-americano (Dow Jones e Nasdaq), cujos períodos são: fev 2004 a dez 2006 (35 observações), e jan 2010 a dez 2012 (36 observações). Seguindo esse raciocínio, estamos também supondo que as amostras provém de uma população de dados cujas variâncias são equivalentes. Vamos, portanto, trabalhar com quatro amostras, e analisar duas a duas.

### **3.8 O Teste T Para Diferença de Duas Médias sob a Hipótese de Variâncias Iguais e Desconhecidas**

Um dos testes estatísticos mais utilizados é aquele no qual desejamos testar a significância entre duas médias amostrais independentes. Como exemplo, podemos pensar em testar se há diferenças significativas entre as médias de temperatura durante um determinado mês, considerando anos distintos, ou ainda, medir se existem diferenças relevantes entre as médias de vendas em uma loja de artigos natalinos, também considerando anos diferentes.

Geralmente, duas médias amostrais consistem de diferentes dados retirados de uma mesma população. Um teste estatístico usual nesta situação é uma função da diferença das duas médias amostrais a serem comparadas, a qual deve ser sempre um número diferente de zero. A hipótese nula, nesse caso, é assumir que a verdadeira diferença é zero. A hipótese alternativa, portanto, é que a diferença não é zero (o que leva a um teste do tipo bi-lateral (two-tailed test), ou que uma das duas médias é maior que a outra (o que leva a um teste de unilateral – one-tailed test). Na maioria dos casos, supõe-se que as distribuições amostrais da diferença entre as médias é bem descrita por uma distribuição normal. Esta suposição será verdade se o tamanho da amostra for suficientemente grande. Se ambas as médias amostrais seguem uma distribuição Normal, suas diferenças também terão a mesma propriedade, uma vez que qualquer combinação linear de variáveis normais irá seguir uma distribuição normal. A estatística teste a ser usada é a seguinte:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Onde:  $\bar{x}_1$  → média da amostra 1

$\bar{x}_2$  → média da amostra 2

$n_1$  → número de elementos na amostra 1

$n_2$  → número de elementos na amostra 2

O fator  $S_p$  é representado pela equação abaixo:

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Onde:  $S_1^2$  → variância da amostra 1

$S_2^2$  → variância da amostra 2

A estatística t segue uma Distribuição t de Student, com  $n_1 + n_2 - 2$  graus de liberdade.

## 4. RESULTADOS E COMENTÁRIOS

### 4.1 Aplicação do Índice de Sharpe

Após a coleta dos dados e a aplicação das diferenças logarítmicas – no sentido de tornar as séries estacionárias –, calculou-se o Índice de Sharpe para a série dos retornos dos Índices Dow Jones e Nasdaq, entre fevereiro de 2004 e dezembro de 2012. Foram feitas simulações para quatro períodos distintos, quais sejam: *período pré-crise financeira*, que considera os dados entre fevereiro de 2004 e dezembro de 2006; *período durante a crise*, que engloba os dados entre janeiro de 2007 e dezembro de 2009; *período pós-crise financeira*, que incorpora os dados entre janeiro de 2010 e dezembro de 2012 e, por fim, calculou-se o valor do Índice para *todo o período* da série. Utilizou-se, como referência à taxa livre de risco, a série mensal da Treasury Bill<sup>11</sup> TB3MS, com vencimento de 3 meses, e negociada no mercado secundário, entre fevereiro de 2004 e dezembro de 2012. Os resultados estão dispostos na tabela abaixo.

**Tabela 2 - Cálculo do Índice de Sharpe para os Índices Dow Jones e Nasdaq em períodos distintos relacionados à Crise Financeira de 2008**

	Dow Jones				Nasdaq			
	E(R <sub>A</sub> )	E(R <sub>f</sub> )	σ <sub>A</sub>	IS	E(R <sub>A</sub> )	E(R <sub>f</sub> )	σ <sub>A</sub>	IS
Todo o período	0,0021	0,0172	0,0411	<b>-0,3676</b>	0,0035	0,0172	0,0538	<b>-0,2534</b>
Período pré-crise	0,0049	0,0314	0,0210	<b>-1,26</b>	0,0045	0,0314	0,0384	<b>-0,7029</b>
Período durante a crise	-0,0050	0,0196	0,0551	<b>-0,4451</b>	-0,0017	0,0196	0,0678	<b>-0,3139</b>
Período pós-crise	0,0063	0,0009	0,0396	<b>0,1372</b>	0,0079	0,0009	0,0517	<b>0,1358</b>

Verificou-se que, à exceção do período pós-crise financeira, com início em janeiro de 2010, o Índice de Sharpe resultou em um valor negativo para todos os outros períodos considerados, em ambas as séries. Isso significa que o investimento em títulos livres de risco,

<sup>11</sup> Treasury Bills são obrigações de dívida do governo americano de curto prazo, com prazo de um ano, ou menos, e emitidas com desconto sobre o seu valor de face. A compra e venda de Treasury Bills é o principal instrumento que o Fed, banco central norte-americano, usa para regular a oferta de moeda da economia. Muitos empréstimos de juros variáveis e hipotecas têm as suas taxas de juros em linha com essas obrigações.

nesse caso, investir em Treasury Bills, teria sido mais interessante em termos de retorno financeiro ao investidor. Outro ponto interessante nessa análise é o fato de a variável em questão ter apresentado um valor melhor no período mais crítico (entre 2007 e 2009) que no período que antecede a crise, para as duas séries em questão.

## 4.2 Aplicação do Teste-t para Diferença de Duas Médias

Para a realização do Teste-t<sup>12</sup> aos dados da amostra, definimos a nossa hipótese de nulidade como sendo a de que não existe diferença nas rentabilidades dos Índices Dow Jones e Nasdaq nos períodos pré e pós-crise financeira. O conjunto de hipóteses, portanto, foi definido da seguinte forma:

**H<sub>0</sub>**: Não existem diferenças significativas nas rentabilidades dos Índices Nasdaq e Dow Jones nos períodos pré e pós-crise financeira de 2008.

**H<sub>1</sub>**: Existem diferenças significativas nas rentabilidades dos Índices Nasdaq e Dow Jones nos períodos pré e pós-crise financeira de 2008.

Aplicando o procedimento descrito na seção 3.8 e considerando-se um nível de significância de 5%, obteve-se os seguintes resultados para cada variável analisada:

---

<sup>12</sup> Foi utilizado o Teste-t para diferença de duas médias, considerando a hipótese de que as amostras provém de populações com variâncias equivalentes.

**Tabela 3 – Teste-t para duas amostras presumindo variâncias equivalentes**

Teste-t: duas amostras presumindo variâncias equivalentes					
	<i>Dow Jones Pré Crise</i>	<i>Dow Jones Pós-Crise</i>	<i>Nasdaq Pré-Crise</i>	<i>Nasdaq Pós-Crise</i>	
Média	0,0049	0,0063	0,0045	0,0079	
Variância	0,0004	0,0016	0,0015	0,0027	
Observações	35	36	35	36	
Variância agrupada	0,0010		0,0021		
Hipótese da diferença de média	0		0		
gl	69		69		
Stat t	-0,1874		-0,3213		
P(T<=t) uni-caudal	0,4259		0,3745		
t crítico uni-caudal	1,6672		1,6672		
P(T<=t) bi-caudal	0,8519		0,7489		
t crítico bi-caudal	1,9949		1,9949		

Como a hipótese nula estabelece que a diferença entre as rentabilidades das séries é igual a zero, estamos diante de um teste bi-lateral, uma vez que os retornos podem ocorrer para mais ou para menos. Nesse sentido, verificou-se que o valor da estatística-teste, tanto para o Nasdaq quanto no caso do Dow Jones, foi menor que o valor crítico tabelado, ao nível de significância de 5%, estando, portanto, dentro da região de aceitação. Dessa forma, concluímos que não existem evidências estatísticas suficientes que nos levem a rejeitar a hipótese nula, qual seja, a de que não existem diferenças significativas entre os retornos das séries analisadas nos períodos pré e pós-crise financeira.

## CONCLUSÃO

Este estudo buscou realizar uma análise estatística do desempenho dos Índices Nasdaq e Dow Jones no período compreendido entre janeiro de 2004 e dezembro de 2012, englobando os anos da crise financeira de 2008 e 2009, cuja origem se deu nos Estados Unidos, e teve como foco principal o mercado imobiliário.

Utilizou-se o Índice de Sharpe – ferramenta bastante difundida em Finanças – com o objetivo de comparar períodos distintos entre os anos supracitados, e verificou-se que, exceto para os anos subsequentes à crise, a escolha pelo investimento em Títulos livres de risco (representado pelas Treasury Bills) seria mais adequada a ter que investir em ações de empresas mais tradicionais e com forte presença no mercado.

A abordagem estatística utilizada (com a aplicação do Teste-t para diferença de duas médias) mostrou que, de uma maneira geral, não existem diferenças significativas no que diz respeito à rentabilidade dos dois índices nos períodos pré e pós-crise financeira, corroborando a hipótese inicial.

Evidentemente, a decisão de investir no mercado financeiro passa por uma análise bem mais complexa e criteriosa que tão somente a utilização de um modelo simples, como o Índice de Sharpe, ou um teste estatístico de hipóteses. Fatores como cenário econômico atual, tamanho da empresa, tempo de atuação no mercado e seus principais indicadores financeiros são também levados em consideração. Não obstante, as ferramentas utilizadas neste estudo servem como um complemento no sentido de se determinar a melhor opção de aplicação financeira, considerando o perfil de risco do investidor.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSAF NETO, A. *Finanças Corporativas e Valor*. 3.ed. São Paulo: Atlas, 2008.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. Sistema Gerenciador de Séries Temporais. Disponível em: <<https://www3.bcb.gov.br/sgspub/consultarvalores/telaCvsSelecionarSeries.paint>>. Acesso em 10 Mai 2013.

BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. *Investments*. 8. ed. New York: McGraw-Hill, 2009.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P.A. *Estatística Básica*. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

CASTRO, A.O.S., *Estatística Não Paramétrica*. Disponível em: <[www.ime.uerj.br/~orestes/nparametricaprograma.htm](http://www.ime.uerj.br/~orestes/nparametricaprograma.htm)>. Acesso em 17/05/2013.

ELTON, E. J. et al. *Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos*. Tradução Helga Hoffmann. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

FLEMMING, D.M.; GONÇALVES, M.B. *Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração*. 5. ed. São Paulo: Makron Books, 1992.

GUJARATI, D.N. *Econometria Básica*. 3. ed.. São Paulo: Makron Books, 2000.

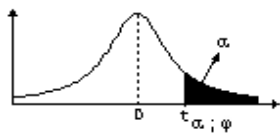
MARKOWITZ, H. *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MORETTIN, P.A.; TOLÓI, C.M.C. *Análise de Séries Temporais*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

SHARPE, W. F. *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk*. The Journal of Finance, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

\_\_\_\_\_. *Mutual Fund Performance*. Journal of Business, [s.n.], p.119-138, Jan. 1966.





**TABELA - Distribuição t de Student (Unicaudal e Bicaudal)**

$\phi$  = graus de liberdade

$\alpha \backslash \phi$	25%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%	$\alpha \backslash \phi$	25%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%
1	1,0000	3,0777	6,3138	12,7062	31,8207	63,6574	46	0,6799	1,3002	1,6787	2,0129	2,4102	2,6870
2	0,8165	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	47	0,6797	1,2998	1,6779	2,0117	2,4083	2,6846
3	0,7649	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	48	0,6796	1,2994	1,6772	2,0106	2,4066	2,6822
4	0,7407	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	49	0,6795	1,2991	1,6766	2,0096	2,4049	2,6800
5	0,7267	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0322	50	0,6794	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778
6	0,7176	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	51	0,6793	1,2984	1,6753	2,0076	2,4017	2,6757
7	0,7111	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	52	0,6792	1,2980	1,6747	2,0066	2,4002	2,6737
8	0,7064	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	53	0,6791	1,2977	1,6741	2,0057	2,3988	2,6718
9	0,7027	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	54	0,6791	1,2974	1,6736	2,0049	2,3974	2,6700
10	0,6998	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	55	0,6790	1,2971	1,6730	2,0040	2,3961	2,6682
11	0,6974	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	56	0,6789	1,2969	1,6725	2,0032	2,3948	2,6665
12	0,6955	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	57	0,6788	1,2966	1,6720	2,0025	2,3936	2,6649
13	0,6938	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	58	0,6787	1,2963	1,6716	2,0017	2,3924	2,6633
14	0,6924	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	59	0,6787	1,2961	1,6711	2,0010	2,3912	2,6618
15	0,6912	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467	60	0,6786	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603
16	0,6901	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	61	0,6785	1,2956	1,6702	1,9996	2,3890	2,6589
17	0,6892	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	62	0,6785	1,2954	1,6698	1,9990	2,3880	2,6575
18	0,6884	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	63	0,6784	1,2951	1,6694	1,9983	2,3870	2,6561
19	0,6876	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	64	0,6783	1,2949	1,6690	1,9977	2,3860	2,6549
20	0,6870	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	65	0,6783	1,2947	1,6686	1,9971	2,3851	2,6536
21	0,6864	1,3232	1,7207	2,0796	2,5177	2,8314	66	0,6782	1,2945	1,6683	1,9966	2,3842	2,6524
22	0,6858	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	67	0,6782	1,2943	1,6679	1,9960	2,3833	2,6512
23	0,6853	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	68	0,6781	1,2941	1,6676	1,9955	2,3824	2,6501
24	0,6848	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	69	0,6781	1,2939	1,6672	1,9949	2,3816	2,6490
25	0,6844	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	70	0,6780	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479
26	0,6840	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	71	0,6780	1,2936	1,6666	1,9939	2,3800	2,6469
27	0,6837	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	72	0,6779	1,2934	1,6663	1,9935	2,3793	2,6459
28	0,6834	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	73	0,6779	1,2933	1,6660	1,9930	2,3785	2,6449
29	0,6830	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	74	0,6778	1,2931	1,6657	1,9925	2,3778	2,6439
30	0,6828	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	75	0,6778	1,2929	1,6654	1,9921	2,3771	2,6430
31	0,6825	1,3095	1,6955	2,0395	2,4528	2,7440	76	0,6777	1,2928	1,6652	1,9917	2,3764	2,6421
32	0,6822	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385	77	0,6777	1,2926	1,6649	1,9913	2,3758	2,6412
33	0,6820	1,3077	1,6924	2,0345	2,4448	2,7333	78	0,6776	1,2925	1,6646	1,9908	2,3751	2,6403
34	0,6818	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	79	0,6776	1,2924	1,6644	1,9905	2,3745	2,6395
35	0,6816	1,3062	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	80	0,6776	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387
36	0,6814	1,3055	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195	81	0,6775	1,2921	1,6639	1,9897	2,3733	2,6379
37	0,6812	1,3049	1,6871	2,0262	2,4314	2,7154	82	0,6775	1,2920	1,6636	1,9893	2,3727	2,6371
38	0,6810	1,3042	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116	83	0,6775	1,2918	1,6634	1,9890	2,3721	2,6364
39	0,6808	1,3036	1,6849	2,0227	2,4258	2,7079	84	0,6774	1,2917	1,6632	1,9886	2,3716	2,6356
40	0,6807	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	85	0,6774	1,2916	1,6630	1,9883	2,3710	2,6349
41	0,6805	1,3025	1,6829	2,0195	2,4208	2,7012	86	0,6774	1,2915	1,6628	1,9879	2,3705	2,6342
42	0,6804	1,3020	1,6820	2,0181	2,4185	2,6981	87	0,6773	1,2914	1,6626	1,9876	2,3700	2,6335
43	0,6802	1,3016	1,6811	2,0167	2,4163	2,6951	88	0,6773	1,2912	1,6624	1,9873	2,3695	2,6329
44	0,6801	1,3011	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923	89	0,6773	1,2911	1,6622	1,9870	2,3690	2,6322
45	0,6800	1,3006	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	90	0,6772	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316
							100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
							120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
							$\infty$	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576