



Grupo de Pesquisa em  
**Gestão e Planejamento Econômico-Financeiro**  
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

## Resultados comparativos com carteiras otimizadas de renda variável: Exemplo no mercado brasileiro

Manuel Alcino R. da Fonseca

### **Textos para Discussão**

**No. 10 – maio 2022.**

O GPEF é um grupo de pesquisa criado na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) com foco em gestão financeira, economia empresarial, administração pública, e planejamento econômico-financeiro.

Os **Textos para Discussão** têm como objetivo principal fazer circular resultados de pesquisas teóricas e aplicadas nas áreas de atuação do GPEF-UFRJ, tanto no meio acadêmico, como fora dele. As opiniões e conclusões expressas nos **Textos** são de responsabilidade dos autores e não representam, necessariamente, as opiniões do GPEF ou da UFRJ. Todas as solicitações e comentários referentes aos **Textos para Discussão** devem ser dirigidos ao coordenador do GPEF:

Manuel Alcino Ribeiro da Fonseca (mfonseca@facc.ufrj.br).

**Web address:** <http://modelosfinanceiros.com.br/publicacoes/>

## **Textos para Discussão**

**No. 10 – maio, 2022.**

### **Título**

Resultados comparativos com carteiras otimizadas de renda variável: Exemplo no mercado brasileiro

### **Autor**

Manuel Alcino R. da Fonseca \*

\* Programa de Pós-graduação Lato Sensu – MBA em Finanças (UFRJ)

### **Resumo:**

Este texto tem como principal objetivo avaliar, através de um exemplo bastante simples – uma carteira com cinco ativos –, as distorções causadas pela prática bastante difundida entre os profissionais do mercado financeiro de especificar carteiras de forma arbitrária, ou seja, sem utilizar a análise de risco e retorno médio introduzida por Markowitz na segunda metade do século passado. A análise efetuada indica que a não utilização dos métodos de seleção de carteiras tem implicações muito desfavoráveis em termos das escolhas que os investidores não profissionais podem ser levados a fazer.

### **Abstract:**

The main objective of this paper is to evaluate, through a simple example – a portfolio with five assets – the distortions caused by the widespread practice among financial professionals of specifying portfolios in an arbitrary way, that is, without using the risk analysis introduced by Markowitz in the second half of the last century. The analysis in the paper indicates that the alternative of not using portfolio selection methods has very unfavorable implications in terms of the choices that individual investors may be led to make.

# **Resultados comparativos com carteiras otimizadas de renda variável: Exemplo no mercado brasileiro**

(Junho, 2022)

Manuel Alcino R. da Fonseca  
Programa de Pós-graduação Lato  
Sensu – MBA em Finanças (UFRJ)

## **Abstract**

The main objective of this paper is to evaluate, through a simple example – a portfolio with five assets – the distortions caused by the widespread practice among financial professionals of specifying portfolios in an arbitrary way, that is, without using the risk analysis introduced by Markowitz in the second half of the last century. The analysis in the paper indicates that the alternative of not using portfolio selection methods has very unfavorable implications in terms of the choices that individual investors may be led to make.

## **Resumo**

Este texto tem como principal objetivo avaliar, através de um exemplo bastante simples – uma carteira com cinco ativos –, as distorções causadas pela prática bastante difundida entre os profissionais do mercado financeiro de especificar carteiras de forma arbitrária, ou seja, sem utilizar a análise de risco e retorno médio introduzida por Markowitz na segunda metade do século passado. A análise efetuada indica que a não utilização dos métodos de seleção de carteiras tem implicações muito desfavoráveis em termos das escolhas que os investidores não profissionais podem ser levados a fazer.

## **Introdução: O modelo média-variância de seleção de carteiras**

Importantes avanços da análise financeira contemporânea, que surgiram a partir da segunda metade do século XX, contribuíram de forma decisiva para que a área de Finanças adquirisse o nível elevado de desenvolvimento que hoje se verifica, tanto em termos de conhecimento específico e formação acadêmica, como também no caso das atividades bastante sofisticadas realizadas por profissionais financeiros. No conjunto destes avanços, um dos primeiros e mais importantes deve-se ao economista norte-americano Harry Markowitz, que em 1952, publicou um artigo baseado em sua dissertação de doutorado realizada na Universidade de Chicago. Nesse trabalho, as decisões de investimento financeiro são examinadas pela primeira vez sob uma ótica científica, usando elementos de estatística e análise matemática (Elton et al., 2010).

O modelo de Markowitz ficou posteriormente conhecida como modelo de seleção de carteiras, análise de risco, ou ainda modelo média-variância. O ponto central dessa análise é que, em relação às decisões de investimento financeiro, e levando em conta as informações disponíveis para os ativos individuais – em especial, os ativos de renda variável –, certas escolhas nunca devem ser feitas. Isto porque, com base nas informações financeiras, podem ser identificadas carteiras “ótimas” ou “eficientes”, que são superiores em termos de risco e rentabilidade média às demais carteiras que poderiam ser escolhidas pelos investidores (Bodie et al., 2009).

Um aspecto importante da análise de Markowitz é que o investimento em carteiras ótimas ou eficientes não produz necessariamente resultados melhores do que aquele direcionado a carteiras alternativas (não-eficientes). O resultado financeiro das carteiras de renda variável é imprevisível, uma vez que ninguém conhece antecipadamente as trajetórias futuras que predominarão nos mercados. Porém, o que o modelo mostra é que, com base nas informações disponíveis aos investidores, apenas algumas escolhas podem ser justificadas pela análise financeira com base científica. Por essa razão, o modelo de seleção de carteiras de ativos gradualmente ocupou posição essencial na área de Finanças e, em particular, entre os profissionais de investimento financeiro (DeFusco et al., 2007).

No entanto, é surpreendente perceber que, no mercado financeiro brasileiro – em especial, nas situações mais diretamente ligadas a investidores não profissionais –, a análise financeira contemporânea ainda não se encontra consolidada, como se pode constatar a partir da prática bastante disseminada de divulgação de “carteiras recomendadas” por parte de corretoras de valores e bancos de investimento, que são atualizadas mensalmente. Nessas carteiras, os ativos aparecem invariavelmente com pesos iguais, ou ainda separados em grupos com mesma ponderação. Portanto, nas “carteiras recomendadas” que prevalecem no mercado brasileiro, a contribuição de Markowitz, surgida 70 anos atrás, é ignorada.<sup>1</sup>

Levando em conta as recomendações de investimento no mercado brasileiro, divulgadas por instituições financeiras e voltadas ao público não profissional, este texto tem como principal objetivo avaliar, através de um exemplo bastante simples – uma carteira com cinco ativos –, as distorções causadas pela prática de seleção arbitrária de carteiras, ou seja, sem utilizar a análise de risco e retorno médio aplicada às decisões de investimento. A avaliação proposta é realizada de forma comparativa: uma carteira com pesos iguais é comparada, em termos de risco e rentabilidade média, com alternativas obtidas através da otimização com base na análise de Markowitz.

O trabalho está dividido em quatro partes. Na Seção 1, os elementos da estimação dos

---

<sup>1</sup> No início de maio de 2022, moneytimes.com.br – site com ampla divulgação, que contava com mais de 50.000 seguidores no LinkedIn – apresentava diversas carteiras recomendadas e, salvo duas exceções, os ativos incluídos tinham pesos iguais (em alguns casos, apenas a lista de ações era apresentada). Nas carteiras com ponderações distintas, uma incluía 8 ativos, metade com participação de 15% e a outra parte com 10% cada uma. No segundo caso, havia 10 ativos: um com peso de 47%, quatro com 7%, e cinco ativos com participação de 5% cada.

parâmetros dos ativos são colocados. Na Seção seguinte, são apresentados os aspectos centrais da otimização de carteiras (detalhes mais técnicos aparecem no Apêndice). Na terceira Seção, o exemplo proposto é desenvolvido. Por último, na Seção 4, estão incluídas as principais conclusões.

### 1. Estimação dos parâmetros dos ativos

O ponto de partida do modelo média-variância são as taxas de retorno obtidas a partir das cotações dos ativos de renda variável. O cálculo dessas taxas traz algumas dificuldades devido aos pagamentos realizados aos acionistas, geralmente na forma de dividendos. O ajuste mais comum é a eliminação na série de preços dos efeitos dos pagamentos ocorridos. Por exemplo, se um dividendo de R\$ 0,20 é pago no período  $t$ , este valor é subtraído dos dados até  $t-1$  (inclusive). Por outro lado, se uma ação sofre *split* de 4 para 1 – uma nova ação para cada quatro antigas –, os valores anteriores ao *split* são reduzidos em 20%.

Séries com valores ajustados para as principais ações no mercado brasileiro estão disponíveis no website Yahoo Finance. Estas séries ajustadas foram usadas no cálculo das taxas de retorno, o que faz com que as rentabilidades obtidas correspondam exclusivamente à variação patrimonial dos ativos.

Usando uma planilha Excel, as taxas de retorno foram calculadas em base semanal – levando em conta cinco dias úteis. Em comparação com a abordagem mais comum, baseada em rentabilidades diárias, esta especificação tem a vantagem de reduzir a variabilidade nas séries, aumentando a confiabilidade das estimativas. A partir das taxas de retorno, foram estimadas a média e a variância para cada ativo, e coeficientes de correlação para cada par de ativos. Uma vez que a carteira utilizada como exemplo inclui cinco ativos, foram estimadas cinco médias e variâncias e dez coeficientes de correlação – total de vinte parâmetros estimados.

O grande número de parâmetros requeridos no modelo média-variância é, certamente, um dos fatores a contribuir para sua utilização menos difundida, como ocorre no mercado financeiro brasileiro. No caso geral de  $n$  ativos, são necessárias estimativas de  $2n + (n - 1)n/2$  parâmetros. O que se observa em mercados mais desenvolvidos é o uso mais intenso de aplicativos específicos para uso em modelos financeiros. Ainda assim, na falta de ferramentas mais sofisticadas, um programa padrão pode ser usado, desde que o conhecimento necessário esteja disponível.

Uma outra abordagem, que permite reduzir consideravelmente o número de parâmetros que devem ser estimados, é a análise conhecida como modelo com um fator de risco ou modelo de índice único (Sharpe, 1963). De acordo com esse modelo, são estimados parâmetros (betas) que resultam da covariância entre o retorno da ação e do mercado (Ibovespa). Por outro lado, a partir de certas hipóteses, pode ser demonstrado o seguinte resultado para a covariância entre os retornos de dois ativos ( $i$  e  $j$ ):  $Cov(r_i, r_j) = \beta_i \beta_j \sigma_M^2$ . Nesta equação, o parâmetro  $\sigma_M^2$  é a variância do retorno do

mercado. Portanto, caso o modelo com um fator de risco seja usado, devem ser estimados apenas  $n$  médias,  $n$  variâncias e  $n$  coeficientes  $\beta_i$ , além da variância do mercado.<sup>2</sup>

## 2. Princípios da otimização de carteiras

No modelo de Markowitz, as principais definições e resultados se aplicam a carteiras de ativos com risco maior que zero – ou seja, ficam excluídos ativos sem risco.<sup>3</sup> Uma carteira é eficiente se corresponder à maior rentabilidade esperada para um dado nível de risco (desvio padrão) ou de variância. Matematicamente, é mais conveniente usar uma definição modificada, a saber, carteiras que correspondem às menores variâncias para determinados níveis de rentabilidade esperada. Esta versão, embora não seja estritamente equivalente à primeira, tem a vantagem de permitir encontrar mais facilmente o conjunto (fronteira) de carteiras eficientes.

Os principais resultados são apresentados a seguir através de três Proposições, que serão exploradas de forma mais técnica no Apêndice. Neste desenvolvimento, são usados princípios básicos da análise de vetores e matrizes. Isto porque os elementos do modelo média-variância contêm conjuntos de informações numéricas. Por exemplo, uma carteira é um conjunto (vetor) de ponderações que tem soma igual a 1. As covariâncias formam um conjunto (matriz) que tem o mesmo número de linhas e colunas, e que é simétrica em relação à diagonal principal. É possível também usar expressões baseadas em somatórios, mas o grau de dificuldade é muito maior e provavelmente não se justifica, uma vez que os elementos básicos da álgebra de vetores e matrizes fazem parte do conteúdo de Matemática no ensino médio.

**Proposição 1.** Dadas duas carteiras na fronteira eficiente de ativos com risco,  $x$  e  $y$ , qualquer outra carteira eficiente pode ser representada como combinação convexa de  $x$  e  $y$ , ou seja, se a carteira  $w$  é eficiente, então  $w = kx + (1 - k)y$  ( $k$  uma constante).<sup>4</sup>

A rentabilidade média e a variância da carteira  $w$  são, respectivamente,  $E(w) = kE(x) + (1 - k)E(y)$ ;  $\text{Var}(w) = k^2 \text{Var}(x) + (1 - k)^2 \text{Var}(y) + 2k(1 - k) \text{Cov}(x, y)$ . No Gráfico 1, a fronteira eficiente foi calculada usando a Proposição 1 a partir de duas carteiras obtidas com base nas Proposições 2 e 3. Estes resultados se aplicam a soluções para carteiras sem restrições de não-negatividade – ou seja, admitindo venda a descoberto

<sup>2</sup> Uma limitação prática é que a matriz de covariâncias, que é usada na otimização de carteiras (ver Seção 2), apresenta diferenças significativas em relação à que é obtida com o modelo de Markowitz. Ou seja, as duas abordagens não são inteiramente consistentes.

<sup>3</sup> Um título soberano que vence em prazo relativamente curto é considerando sem risco no caso do investidor que mantém o título até o vencimento, e para a moeda em que este ativo foi emitido.

<sup>4</sup> Este resultado foi demonstrado originariamente em Black (1972). ver também Benninga (1982).

dos ativos que compõem a carteira.<sup>5</sup>

**Proposição 2.** Dada uma constante  $k$ , uma carteira  $x$  na fronteira eficiente fica determinada pela equação  $c V x = Er - k s$ . Nesta equação,  $V$  é a matriz de covariâncias do conjunto de ativos de renda variável,  $Er$  é o vetor com as rentabilidades médias desses ativos e  $s$  é o vetor-soma, ou seja,  $s^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ . A constante  $c$  é definida no Apêndice.

Uma característica da Proposição 2 é que ela pode ser representada de uma forma equivalente que, considerando os cálculos envolvidos, é mais conveniente (ver o Apêndice):

$$c x = z = V^{-1} (Er - ks); \quad c = \sum_i z_i.$$

Quando  $k$  é igual à taxa de juros sem risco, a carteira  $x$ , é considerada a carteira ótima na perspectiva do investidor individual. Generalizando este resultado de acordo com o conceito de equilíbrio no mercado de capitais, a carteira ótima na fronteira eficiente é a “carteira do mercado” – por exemplo, na bolsa brasileira, essa carteira corresponderia ao Ibovespa. Nesse caso, pode-se mostrar que, no plano risco-retorno médio  $(\sigma_c, Er_c)$ , a reta que liga os pontos determinados pela rentabilidade sem risco  $r_s$  e pela carteira do mercado é  $Er_c = r_s + \sigma_c (Er_M - r_s)/\sigma_M$ . Esta equação é chamada de reta do mercado de capitais (*capital market line*).

No plano  $(\sigma_c, Er_c)$ , a fronteira eficiente está localizada em uma hipérbole – mais especificamente, na metade da hipérbole localizada na região com valores positivos para  $\sigma_c$ . O ponto situado mais à esquerda nessa hipérbole corresponde à carteira de mínimo risco.

**Proposição 3.** Para um conjunto de ativos com risco maior que zero, a carteira de mínimo risco é dada pela equação  $a V x = s$ . A constante  $a$  é definida no Apêndice.

### 3. Desenvolvimento do exemplo

O exemplo utilizado nesta análise comparativa consiste em uma carteira de renda variável com ativos selecionados de acordo com uma perspectiva de redução de risco – em particular, com ênfase nas empresas do setor elétrico, que é um segmento com risco relativamente menor. Por outro lado, foi incluído um ativo com exposição à variação cambial. Esta especificação visa, por um lado, permitir um retorno maior (embora com risco também maior) e, além disso, leva em conta uma das principais tendências financeiras observada no início de 2022, ou seja, a valorização da moeda norte-americana em relação às demais moedas – e, em particular, ao real.

---

<sup>5</sup> Venda a descoberto significa tomar emprestado um ativo e vendê-lo. No caso da carteira, a ponderação correspondente a esse ativo é negativa. O recurso obtido é usado para investir em outros ativos, de forma que a soma das ponderações continua sendo igual a 1.

Levando em conta as principais ações incluídas no Ibovespa, e de forma consistente com a proposta de redução de risco, foram descartadas ações de empresas ligadas a commodities, e de empresas do setor financeiro. No segundo caso, a justificativa é de que, em geral, a valorização destas empresas é afetada negativamente pela alta do dólar em relação ao real. Esta relação inversa se aplica, de forma geral, à bolsa brasileira como um todo, mas se observa com mais intensidade nas ações do setor financeiro. Dessa forma, com as ressalvas já mencionadas, foram selecionadas duas ações com maior valor de mercado no índice, Abev3 e Wege3 – incluídas, respectivamente, nos segmentos industriais Alimentos e Bebidas e Equipamentos Elétricos (bens de capital).

Tabela 1. Ponderações do Ibovespa – prévia para o quadrimestre Maio-Agosto/2022.

IBOV - Prévia Mai. a Ago. 2022		
Código	Ação	Part. (%)
VALE3	VALE	14,93
PETR4	PETROBRAS	6,64
ITUB4	ITAUUNIBANCO	5,85
BBDC4	BRABESCO	4,67
PETR3	PETROBRAS	4,41
B3SA3	B3	4,03
ABEV3	AMBEV S/A	2,99
BBAS3	BRASIL	2,32
JBSS3	JBS	2,31
WEGE3	WEG	2,23

Fonte: [www.b3.com.br](http://www.b3.com.br).

No caso das empresas do setor elétrico, foram selecionadas duas ações incluídas no índice de empresas de utilidade pública da B3. Nessa escolha, levaram-se em conta, além do valor de mercado refletido no índice, indicadores mais favoráveis de governança corporativa. Em particular, não foram consideradas empresas controladas por fundos de investimento ou instituições financeiras. Dessa forma, as ações incluídas foram Cpfe3 e Enbr3 (ver Tabela 2).

Tabela 2. Ponderações do Util-B3 – prévia para o quadrimestre Maio-Agosto/2022.

UTIL - Prévia Mai. a Ago. 2022		
Código	Ação	Part. (%)
EQTL3	EQUATORIAL	13,285
ENEV3	ENEVA	9,123
CMIG4	CEMIG	8,032
SBSP3	SABESP	7,971
ELET3	ELETROBRAS	7,245
CPLE6	COPEL	5,533
ENGI11	ENERGISA	5,491
EGIE3	ENGIE BRASIL	5,244
TRPL4	TRAN PAULIST	4,900
ELET6	ELETROBRAS	4,825
TAE11	TAESA	4,515
CPFE3	CPFL ENERGIA	3,073
CMIG3	CEMIG	2,668
ENBR3	ENERGIAS BR	2,406

Fonte: [www.b3.com.br](http://www.b3.com.br).

Por último, foi incluído na carteira um *exchange-traded fund* (ETF), Ivvb11, lastreado no mercado de renda variável norte americano, uma posição que representa exposição à variação cambial (afetada favoravelmente no caso de desvalorização do real em relação ao dólar). O mês inicial da amostra é outubro de 2020, que representa um período posterior ao auge da crise econômico-financeira que resultou da epidemia de covid-19. As estimativas dos parâmetros dos ativos estão colocadas na Tabela 3.

Tabela 3. Estimativas dos parâmetros – amostra no período Out./2020 a Abril/2022. Taxas de retorno com base em cinco dias úteis – no. de observações: 384.

		ABEV3	CPFE3	ENBR3	WEGE3	IVVB11
Semanal	Média	0,0041	0,0054	0,0050	0,0012	0,0018
	Desvio padrão	0,0466	0,0367	0,0278	0,0506	0,0265
Anual	Média	0,2116	0,2815	0,2593	0,0623	0,0955
	Desvio padrão	0,3359	0,2646	0,2004	0,3647	0,1908
Correlações						
	ABEV3	1	0,3408	0,3707	0,1984	0,0734
	CPFE3		1	0,5562	0,1263	-0,2796
	ENBR3			1	0,2222	-0,1599
	WEGE3				1	0,2133
	IVVB11					1

Fonte: Estimativas obtidas pelo autor.

Dadas as estimativas para os ativos, e com base na análise de otimização de carteiras apresentada na Seção 2, foram obtidas duas carteiras utilizando as Proposições 2 e 3. No primeiro caso (Proposição 2), a constante  $k$  foi especificada como 0,07 – correspondendo a uma taxa de juros sem risco de 7% ao ano (carteira C incluída na Tabela 4 e representada no Gráfico 1). A Proposição 3, por sua vez, permitiu encontrar a carteira de risco mínimo (carteira B). A partir destas carteiras iniciais, vários pontos (carteiras) foram especificados no plano risco-rentabilidade média usando a Proposição 1. A hipérbole que inclui a fronteira eficiente obtida para estes cinco ativos está representada no Gráfico 1 – os dados no Gráfico estão em base anual.

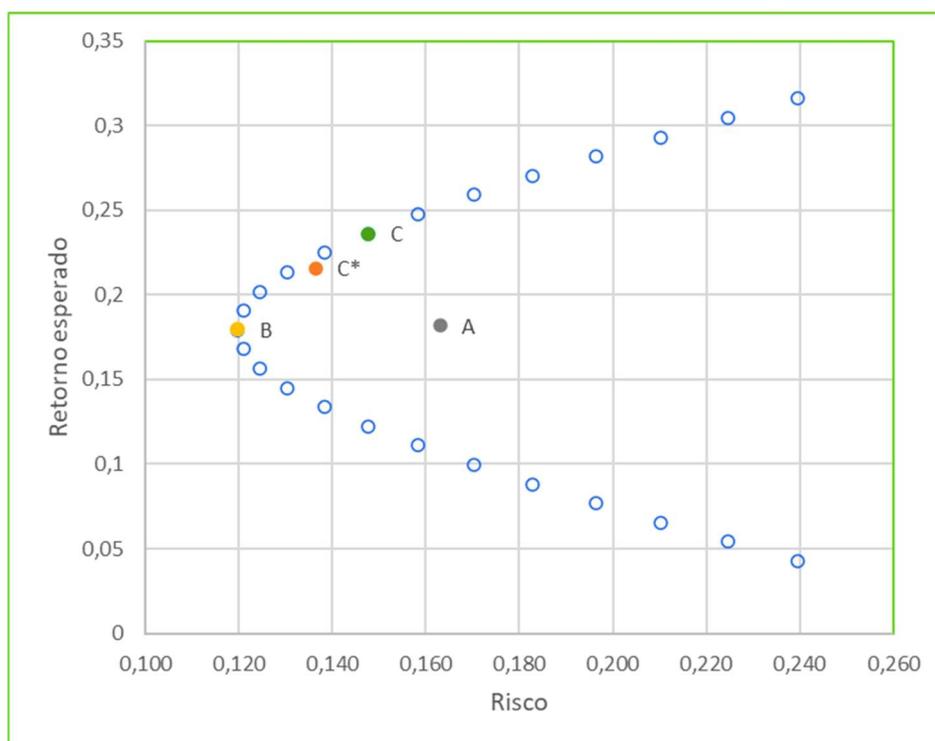


Gráfico 1. Hipérbole calculada para o exemplo com cinco ativos.

Além das carteiras otimizadas (B e C), duas outras carteiras estão incluídas no Gráfico 1 e na Tabela 4. A carteira A contém a mesma participação para cada um dos cinco ativos – cada ativo é incluído com peso de 20%. Por outro lado, a carteira C\* é obtida de C eliminando os ativos com pesos negativos (Abev3 e Wege3) e ajustando as demais ponderações. A justificativa é que a realização de operações de venda a descoberto (ver nota 4) pode não ser interessante para a maioria dos investidores não profissionais, por ser mais difícil de realizar. De qualquer forma, levando em conta a localização na hipérbole, a carteira C\* pode ser considerada aproximadamente ótima.

Tabela 4. Carteiras representadas no Gráfico 1.

Carteira	ABEV3	CPFE3	ENBR3	WEGE3	IVVB11	Soma	Sigma_c	Er_c
A	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	1	0,163	0,182
B	-0,0120	0,1854	0,3087	-0,0027	0,5206	1	0,120	0,179
C	-0,0110	0,2683	0,5347	-0,1336	0,3417	1	0,148	0,236
C*	0	0,2344	0,4671	0	0,2985	1	0,137	0,216

Fonte: Resultados obtidos pelo autor.

Como pode ser observado na Tabela 4, a utilização de pesos iguais (carteira A), sem levar em conta os princípios de seleção de carteiras ótimas, na comparação com a carteira C\* que resulta da otimização – fazendo ajustes para eliminar a venda a descoberto –, implica em um aumento no risco em quase três pontos percentuais (19% a mais de risco), e uma redução do retorno esperado de 3,4 pontos percentuais – esta comparação desfavorável fica colocada de forma expressiva no Gráfico. Certamente, não se justifica a escolha de uma carteira com características bem menos favoráveis em termos de investimento. Por outro lado, a otimização levou à eliminação de dois dos cinco ativos inicialmente considerados (Abev3 e Wege3).

#### 4. Considerações finais

Neste estudo, é utilizada uma carteira formada por cinco ativos de renda variável, selecionados inicialmente com base em uma estratégia voltada, por um lado, para a redução do risco e, adicionalmente, para ter exposição em relação à variação cambial. A partir deste conjunto de ativos, foi realizada uma análise comparativa na qual uma carteira com ponderações iguais foi comparada com uma carteira otimizada de acordo com o modelo média-variância.

Nesta análise comparativa, os parâmetros das carteiras – risco e rentabilidade esperada – foram calculados e contrastados e, além disso, as duas carteiras foram representadas graficamente, tendo como referência o conjunto de carteiras eficientes com ativos de risco maior que zero. Como foi colocado acima, este conjunto está localizado em uma hipérbole que contém, como subconjunto, a fronteira de carteiras eficientes.

A análise efetuada ilustra que a prática comum entre os profissionais do mercado financeiro de divulgar carteiras com pesos iguais, ou seja, desconsiderando a análise introduzida por Markowitz a setenta anos atrás, tem implicações muito desfavoráveis em termos das escolhas que os investidores não profissionais podem eventualmente fazer.

## Apêndice

A Proposição 1 pode ser considerada intuitiva e é facilmente verificada em aplicações práticas. A hipérbole com as carteiras eficientes representada no Gráfico 1 foi construída com base em combinações convexas de duas carteiras. Portanto, os desenvolvimentos necessários a uma demonstração rigorosa provavelmente não se justificam.

A Proposição 2 resulta da propriedade de que, dado um valor  $k$  no eixo vertical (positivo ou negativo), um ponto da fronteira eficiente corresponde à reta tangente à curva (hipérbole). Matematicamente, o problema é o de encontrar a carteira correspondente à máxima inclinação de uma reta determinada por  $k$  e por um ponto na hipérbole.

$$\text{Máximo: } f = \frac{Er_c - k}{\sigma_c}$$

$$\text{Sujeito a: } x^T s = 1$$

Nesta representação,  $Er_c = x^T Er$  e  $\sigma_c = (x^T V x)^{1/2}$  são os parâmetros de uma carteira no plano risco–rentabilidade média,  $s$  é o vetor-soma, e a restrição define uma carteira. A solução é (Fonseca, 2003):

$$x = \frac{1}{b - ak} V^{-1} (Er - sk)$$

$$a = s^T V^{-1} s; \quad b = Er^T V^{-1} s$$

Vale notar que, considerando as definições de  $a$  e  $b$ , o denominador  $(b - ak) = c$  é a soma dos elementos do vetor  $(Er - sk)$ , ou seja, é igual a este vetor multiplicado pelo vetor-soma  $s$ .

Na Proposição 3, o problema é o de minimizar a variância dada a restrição que define uma carteira:

$$\text{Mínimo: } \sigma_c^2 = x^T V x$$

$$\text{Sujeito a: } x^T s = 1$$

A solução é (Fonseca, 2003):

$$x = \frac{1}{a} V^{-1} s$$

## Referências

Black, Fischer. “Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing”. The Journal of Business, Vol. 45, No. 3 (Jul., 1972), pp. 444-455.

Benninga, Simon. Financial Modeling. 3ª. ed. Cambridge, Mass: The MIT Press, 1982.

Bodie, Zvi; Kane, Alex & Marcus, Alan J. Investments, 8a. ed. Nova York: McGraw-Hill, 2009.

DeFusco, Richard A. et al. Quantitative Investment Analysis, 2a. ed. Hoboken–NJ: John Wiley, 2007.

Elton, Edwin J. et al. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 8a. ed. Hoboken-NJ: John Wiley, 2010.

Fonseca, Manuel Alcino R. da. Álgebra Linear Aplicada – a Finanças, Economia e Econometria. Barueri-SP: Manole, 2003.

Sharpe, William F. “A Simplified Model for Portfolio Analysis”. Management Science, vol. 9, no. 2, janeiro de 1963, pp. 277-93.