Grupo de Pesquisa em
Gestão e Planejamento Econômico-Financeiro
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Otimização de funções quadráticas com restrições lineares: Aplicação a modelos de investimento financeiro

Manuel Alcino R. da Fonseca

Textos para Discussão

No. 20 – outubro 2024.

Os **Textos para Discussão** têm como objetivo principal fazer circular resultados de pesquisas teóricas e aplicadas nas áreas de atuação do GPEF-UFRJ, tanto no meio acadêmico, como fora dele. As opiniões e conclusões expressas nos **Textos** são de responsabilidade dos autores e não representam, necessariamente, as opiniões do GPEF ou da UFRJ. Todas as solicitações e comentários referentes aos **Textos para Discussão** devem ser dirigidos ao coordenador do GPEF:

Manuel Alcino Ribeiro da Fonseca (mfonseca@facc.ufrj.br).

***Web address*:** http://modelosfinanceiros.com.br/publicacoes/

Textos para Discussão
No. 20 – outubro, 2024.

Título

Otimização de funções quadráticas com restrições lineares: Aplicação a modelos de investimento financeiro

Autor

Manuel Alcino R. da Fonseca *

* Programa de Pós-graduação Lato Sensu – MBA em Finanças (UFRJ)

Resumo:

Neste texto, são revisados alguns métodos que têm sido usados na resolução de problemas de programação quadrática. São apresentados também exemplos de otimização de carteiras de renda variável. A principal vantagem da programação quadrática está na possibilidade de garantir condições de não-negatividade para as variáveis. Na análise financeira, este tipo de restrição corresponde a carteiras “long only” – ou seja, sem incluir venda a descoberto.

Abstract:

In this paper, some methods that have been used in solving quadratic programming problems are reviewed. Examples of optimization applied to portfolios with equities are also included. The main advantage of quadratic programming is the possibility of attending non-negativity restrictions for the variables. In financial analysis, this type of restriction corresponds to "long only" portfolios – that is, without short selling.

Otimização de funções quadráticas com restrições lineares: Aplicação a modelos de investimento financeiro

(Out. 2024; revisado Nov. 2024)

Manuel Alcino R. da Fonseca
Programa de Pós-graduação Lato Sensu – MBA em Finanças (UFRJ)

Introdução

A análise quantitativa de investimento financeiro ("portfolio analysis") é uma aplicação importante da otimização de funções quadráticas sujeita a restrições lineares (programação quadrática), que, por sua vez, é uma área bem estabelecida em matemática aplicada e métodos numéricos. A solução deste tipo de problema, como se sabe, pode ser obtida por métodos tradicionais de análise matemática (cálculo vetorial). A principal vantagem da programação quadrática está na possibilidade de garantir condições de não-negatividade para as variáveis. Na análise financeira, este tipo de restrição corresponde a carteiras "long only" – ou seja, sem incluir venda a descoberto.

Neste texto, são revisados alguns métodos que têm sido usados mais recentemente na resolução de problemas de programação quadrática. São apresentados também exemplos de otimização de carteiras de renda variável. Na Seção 1, estão colocados os fundamentos da otimização quadrática sujeita a restrições lineares. A Seção seguinte apresenta um dos métodos mais eficazes na solução deste tipo de problema. Posteriormente, na Seção 3, problemas de otimização incluídos no tradicional modelo média-variância são apresentados. A última Seção desenvolve exemplos destes problemas com ativos de renda variável, e algumas conclusões são apresentadas ao final

1. Otimização de função quadrática com restrições lineares (programação quadrática)

A função quadrática a ser otimizada, com variáveis incluídas no vetor x, é representada de forma geral por $f(x) = c^T x + ½\, x^T Q\, x$ (a fração é incluída por conveniência, e não altera o desenvolvimento). Os vetores c e x têm dimensão (n×1), e Q é uma matriz simétrica (n×n).

Problema de otimização convexa

Este tipo de problema ocorre quando a função-objetivo é convexa e, adicionalmente, as restrições definem um conjunto convexo – o que se verifica quando as restrições são lineares. A função-objetivo $f(x)$ é convexa quando $x^T Q\, x \geq 0$ para qualquer vetor x (a matriz Q é positivamente semi-definida). Quando o problema de otimização é convexo, se existir uma solução viável (que satisfaz as restrições) então existe necessariamente uma solução ótima – o problema é "bem definido". Em geral, esta propriedade está presente nos modelos de investimento financeiro.

Relação entre programação linear e quadrática

A partir da década de 1980, foram exploradas mais profundamente as relações entre a solução de problemas lineares de otimização (programação linear) e de otimização quadrática. Isto porque métodos de solução usados em problemas não-lineares se mostraram mais eficientes na programação linear do que os métodos tradicionais (Cornuéjols & Tütüncü, 2006; Nocedal & Wright, 2006). Assim como ocorre na programação linear, os problemas de otimização quadrática possuem uma versão original (primal) e a versão dual correspondente.

Problema de programação linear na forma padrão:

$$\underset{x}{\text{Min:}}\ c^T x, \text{ sujeito a } A\,x = b,\ x \geq 0,\ A \in \Re^{m\times n}.$$

O problem dual:

$$\underset{y,\,s}{\text{Max:}}\ b^T y, \text{ sujeito a } A^T y + s = c,\ s \geq 0.$$

(Restrições de não-negatividade sobre y não são incluídas.)

Funções de Lagrange e condições de primeira ordem (KKT):

Primal: $\mathcal{L}(x, y, s) = c^T x - y^T (A\,x - b) - s^T x;$

$A^T y + s - c = 0;\ A\,x - b = 0;\ s_i\, x_i = 0,\ \forall\ i;\ (x, s) \geq 0.$

Dual: $\mathcal{L}(x, y, s) = b^T y - x^T (A^T y + s - c);$

$A^T y + s - c = 0;\ A\,x - b = 0;\ s_i\, x_i = 0,\ \forall\ i;\ (x, s) \geq 0.$

Podemos constatar que, nas duas versões (primal e dual) de um problema linear de otimização, as condições de primeira ordem são iguais. Um desenvolvimento semelhante se aplica aos problemas de programação quadrática (Gondzio, 2016).

Problema de programação quadrática com restrições de igualdade:

$$\underset{x}{\text{Min:}}\ c^T x + \tfrac{1}{2}\, x^T Q\, x, \text{ sujeito a } A\,x = b,\ x \geq 0.$$

O problema dual:

Max: $b^T y - ½\, x^T Q x$, sujeito a $A^T y + s - Q x = c$, $(x, s) \geq 0$.
x, y, s

No problema primal de otimização convexa, as funções de Lagrange e condições de primeira ordem (KKT) são:

$L(x, y, s) = c^T x + ½\, x^T Q x - y^T (A x - b) - s^T x$;

$A^T y + s - Q x - c = 0$; $A x - b = 0$; $s_i x_i = 0$, $\forall\, i$; $(x, s) \geq 0$.

2. Método numérico de solução: "Interior point"

Para levar em conta as desigualdades (condições de não-negatividade) no problema de programação quadrática (primal), uma função que inclui a soma dos logaritmos das variáveis x_i ($-\mu \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$) é introduzida na função-objetivo. As condições de primeira ordem, incluindo esta função logarítmica, são:

$A^T y + \mu X^{-1} e - Q x - c = 0$; $A x - b = 0$; onde: $X = \text{diag}\,\{x_1, x_2, ..., x_n\}$; $e^T = (1, 1, ..., 1)$.

Levando em conta a primeira condição KKT no problema original (Seção 1), temos:

$s = \mu X^{-1} e$, ou $X S e = \mu e$; onde $S = \text{diag}\,\{s_1, s_2, ..., s_n\}$.

Portanto, na solução ótima (com $X S e = \mu e$), temos $\mu = s^T x / n$. Esta especificação para μ é usada nas iterações do método numérico. A forma geral para as condições de primeira ordem no problema transformado são:

$$F(x, y, s) = \begin{bmatrix} A^T y + s - Qx - c \\ Ax - b \\ XSe - \mu e \end{bmatrix} = 0$$

Este sistema não é linear devido ao terceiro conjunto de equações, mas ele pode ser resolvido através do método de Newton. A matriz para as condições de primeira ordem (matriz jacobiana) é:

$$\begin{bmatrix} -Q & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix}$$

Portanto, dado um vetor inicial (ponto no conjunto viável) (x^0, y^0, s^0), encontramos a direção determinada pelo método de Newton, $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$, resolvendo o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} -Q & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T y + s - Qx - c \\ Ax - b \\ XSe - \mu e \end{bmatrix}$$

Com o objetivo de permitir alterações na direção de Newton obtida em uma iteração, é introduzido um fator $\sigma \in (0, 1]$ no lado direito no terceiro conjunto de equações: $X S e - \sigma \mu e$. Este procedimento permite encontrar soluções (pontos) em determinada trilha ("path") na região viável, ou seja, atendendo as condições de não negatividade – em princípio, a direção de Newton poderia nos levar para fora dessa região. Da mesma maneira, nas iterações numéricas, é introduzido um fator $\alpha \in (0, 1]$ que multiplica os elementos do vetor $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ para encontrar um novo ponto (x^k, y^k, s^k) na trilha viável – ou seja, este fator permite controlar a magnitude do movimento, e garantir que a trilha seguida continue na região viável (sem valores negativos para x e s, embora a mesma restrição não esteja presente no vetor y).

Uma vez que um aspecto central deste método numérico é, em todas as iterações, permanecer restrito ao interior da região viável, determinada pelas restrições do problema, este método é conhecido como "interior point".

3. Modelo média-variância de otimização de carteiras

Os fundamentos deste modelo foram desenvolvidos na década de 1950 por H. Markowitz, professor de economia na Universidade de Chicago. Existem diferentes versões desta análise quantitativa de investimento financeiro, e nem todas correspondem a problemas de programação quadrática. Outra dificuldade é que, em algumas versões, estão presentes restrições lineares com desigualdades, no lugar de igualdades – por exemplo, $x^T Er \geq r_c$, onde o vetor x representa uma carteira, o lado esquerdo contém o retorno esperado dessa carteira, e o lado direito um valor mínimo para esse retorno.

Em particular, dois problemas de otimização baseados no modelo média-variância têm recebido maior atenção de profissionais e pesquisadores na área de finanças: achar a carteira com menor risco global, e aquela com a máxima razão de Sharpe (Da Fonseca; Da Fonseca & Oliveira, 2024). No primeiro caso, os retornos médios dos ativos não são levados em conta – apenas são considerados os riscos (ou volatilidades) e as covariâncias –, e este é um problema bem definido de otimização convexa. O segundo problema, na sua forma tradicional, busca determinar a carteira tangente (maior inclinação) na fronteira de carteiras eficientes, o que não corresponde propriamente a um problema de programação quadrática. Uma alternativa consiste em usar, como ponto de partida, soluções obtidas através de métodos tradicionais do cálculo, que, no entanto, não asseguram que as carteiras sejam "long only" – isto é, sem coeficientes negativos. Estes dois problemas estão especificados a seguir.

Carteira de mínimo risco global

Neste problema, V é a matriz de variâncias e covariâncias dos ativos representados no vetor x.

$$\min_{x} : \tfrac{1}{2}\, x^T V x; \text{ sujeito a } x^T e = 1;\ x \geq 0.$$

Quando as restrições de não-negatividade não são incluídas, este problema pode ser resolvido pelo cálculo vetorial (Da Fonseca, 2022). A solução é:

$$x^* = (1/a)\,V^{-1}e;\ \text{onde: } a = e^T\,V^{-1}e.$$

Um aspecto importante é que esta solução, adaptada para eliminar coeficientes negativos, pode ser usada como ponto de partida para o método numérico de “interior point”.

Carteira na fronteira eficiente (mínimo risco) com retorno médio especificado

$$\underset{x}{\text{Min}}:\ ½\,x^T\,V\,x;\ \text{sujeito a } x^T\,e = 1;\ x^T\,Er = r_c;\ x \geq 0.$$

Neste procedimento, o valor r_c é especificado pela solução encontrada em uma etapa anterior, através do cálculo vetorial, para a carteira tangente na fronteira eficiente. Além disso, esta solução do cálculo, adaptada para eliminar coeficientes negativos, pode ser usada como ponto de partida para o método de “interior point”. A solução para a carteira tangente sem restrições de não-negatividade é:

$$x^* = V^{-1}\,(Er - r_f\,e)\,(b - a\,r_f)^{-1}.$$

Nesta solução, a tem a definição acima, $b = (Er)^T\,V^{-1}\,e$, e r_f é o retorno de um ativo sem risco.

4. Exemplo de otimização convexa aplicada à análise financeira

Neste exemplo, são incluídos seis ativos de renda variável disponíveis no mercado brasileiro entre 2018 e 2022 (posteriormente, a empresa Energias do Brasil S. A. fechou seu capital): ABEV3, CPFE3, ENBR3, RAIL3, WEGE3, IVVB11. Os retornos médios, variâncias e covariâncias foram estimados a partir de taxas calculadas para cinco dias úteis (e não taxas diárias), o que contribui para que os resultados obtidos sejam mais consistentes. Todas as estimativas (matriz V e vetor Er) estão colocadas em base anual.

Matriz V:

ABEV3	0,100	0,027	0,023	0,033	0,028	0,007
CPFE3	0,027	0,071	0,029	0,026	0,013	-0,011
ENBR3	0,023	0,029	0,040	0,022	0,017	-0,005
RAIL3	0,033	0,026	0,022	0,109	0,032	0,000
WEGE3	0,028	0,013	0,017	0,032	0,133	0,018
IVVB11	0,007	-0,011	-0,005	0,000	0,018	0,040

Vetor Er:

ABEV3	0,198
CPFE3	0,276
ENBR3	0,238
RAIL3	0,049
WEGE3	0,054
IVVB11	0,057

Carteira de mínimo risco global

a) Solução sem restrições de não-negatividade (cálculo vetorial):

Minimum-risk portfolio

ABEV3	-0,0015	Var p
CPFE3	0,1539	0,0159
ENBR3	0,3237	12,61%
RAIL3	0,0483	
WEGE3	-0,0136	Erp
IVVB11	0,4892	0,1488
	1	

b) Solução com restrições de não-negatividade (método de “interior point”):

Initial solution (x^0)

ABEV3	0,049
CPFE3	0,154
ENBR3	0,324
RAIL3	0,048
WEGE3	0,036
IVVB11	0,389
	1

Solution with inequality constraints (QP)

ABEV3	0,0019	Var p
CPFE3	0,1527	0,0159
ENBR3	0,3182	12,62%
RAIL3	0,0449	
WEGE3	0,0005	Erp
IVVB11	0,4818	0,1480
	1	

Para efeito de comparação, a solução para o mesmo problema, encontrada através do Solver (programa Excel), aparece a seguir.

Solution with inequality constraints (Solver)

ABEV3	0	Var p
CPFE3	0,1531	0,0159
ENBR3	0,3191	12,62%
RAIL3	0,0452	
WEGE3	0	Erp
IVVB11	0,4826	0,1480
	1	

Carteira tangente na fronteira eficiente (máxima razão de Sharpe)

a) Solução sem restrições de não-negatividade (cálculo vetorial):

Solution without inequality constraints

a =	62,88	ABEV3	0,0910	Var p
b =	9,355	CPFE3	0,3690	0,0389
b - a rf =	5,582	ENBR3	0,6853	19,71%
rf =	0,060	RAIL3	-0,2375	
		WEGE3	-0,1230	Erp
		IVVB11	0,2151	0,2769
			1	

b) Solução com restrições de não-negatividade (método de “interior point”):

Initial solution (x^0)

0,0910
0,2690
0,4853
0,0100
0,0100
0,1352

1

Solution with inequality constraints (QP)

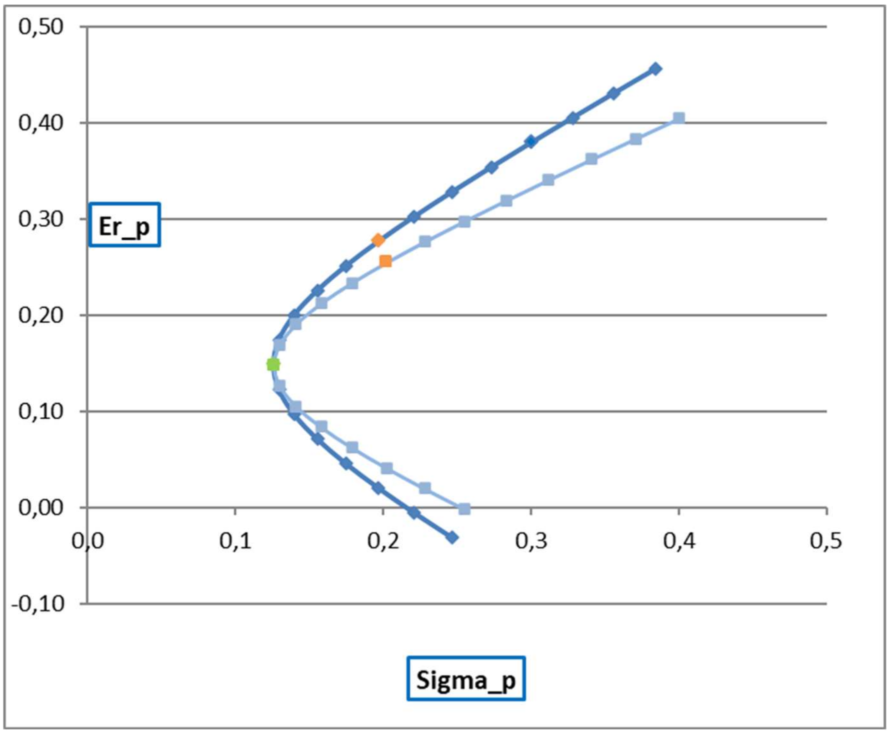
ABEV3	0,0023	Var p	
CPFE3	0,4509		0,04104
ENBR3	0,5466		20,26%
RAIL3	0,0001		
WEGE3	0,0002	Erp	
IVVB11	0,0004		0,255
	1		

Nesta solução, o retorno médio da carteira (Er_P) foi especificado com valor um pouco abaixo daquele obtido na solução sem restrições de não-negatividade (r_c = 0,255). Com esse recurso, pode ser obtida uma solução aproximada para a carteira de máxima razão de Sharpe em um problema de programação quadrática. Para efeito de comparação, a solução para o mesmo problema encontrada através do Solver está colocada abaixo.

Solution with inequality constraints (Solver)

ABEV3	0	Var p	
CPFE3	0,4482		0,04103
ENBR3	0,5518		20,26%
RAIL3	0		
WEGE3	0	Erp	
IVVB11	0		0,255
	1		

A partir de certas propriedades do modelo média-variância (Da Fonseca, 2022), as soluções de mínimo risco global e de máxima razão de Sharpe permitem representar as regiões de carteiras eficientes, que estão representadas no Gráfico.



Regiões de carteiras eficientes para as soluções encontradas.

Notas: a) Linha escura – soluções sem restrições de não-negatividade; linha clara – soluções da programação quadrática.

b) Ponto verde: carteiras de mínimo risco global; pontos laranja: carteiras de máxima razão de Sharpe.

5. Considerações finais

Nos problemas de otimização de funções quadráticas com restrições lineares, a principal vantagem da programação quadrática, em relação aos métodos tradicionais baseados no cálculo, está na possibilidade de garantir condições de não-negatividade para as variáveis. A análise quantitativa de investimento financeiro é uma aplicação importante deste tipo de problema e, neste caso, as restrições de não-negatividade correspondem a carteiras “long only” – ou seja, que não incluem venda a descoberto. Neste texto, é feita uma revisão de alguns procedimentos numéricos que têm sido usados na resolução de problemas de programação quadrática. Para ilustrar os métodos apresentados, são desenvolvidos exemplos de otimização de carteiras com seis ativos de renda variável.

Referências

Cornuéjols, Gérard & Reha Tütüncü. Optimization Methods in Finance. Cambridge Univ. Press, 2006.

Da Fonseca, Manuel Alcino R. Resultados Comparativos com Carteiras Otimizadas de Renda Variável: Exemplo no Mercado Brasileiro. Grupo de Pesquisa em Gestão e Planejamento Econômico-Financeiro (GPEF), Texto para Discussão, No. 10, maio 2022. Disponível em: https://modelosfinanceiros.com.br/assets/documentos/gpef_-_texto_para_discusso_no_10_-_20222.pdf

Da Fonseca, Vitor M. A.; Manuel A. R. da Fonseca & André B. Oliveira. Revisiting the Discussion on the Effectiveness of Alternative Portfolio Models: Out-of-sample Analysis of Brazil's Equity Market, 2015-23. Applied Economics and Finance, Vol. 11, No. 3, 2024.
Disponível em: https://doi.org/10.11114/aef.v11i3.6999

Gondzio, Jacek. Interior Point Methods for Convex Quadratic Programming. School of Mathematics, Univ. of Edinburgh, 2016.
Disponível em: https://www.maths.ed.ac.uk/hall/NATCOR_2016/IPMsQP.pdf

Nocedal, Jorge & Stephen J. Wright. Numerical Optimization, 2a. ed. N. York: Springer, 2006.